Correction DM8

Exercice 1

1)$x \mapsto nx$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ (polynôme).

$x \mapsto -x$ et $x \mapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbf{R}$ (polynôme et fonction usuelle).

Par composée, $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

Par différence, f_n est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R},\ f_n'(x) = n + e^{-x}$.

2)• $\forall x \in \mathbf{R},\ f_n'(x) > 0$ car $n \in \mathbf{N}^*$ et $e^{-x} > 0$.
Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} nx = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$, par composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$,
Par différence, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} nx = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$, par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$,
Par différence, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

3)f_n est continue sur $\mathbf{R}$ (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
D'après le théorème de bijection, elle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur
$f(\mathbf{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[= \mathbf{R}$.

0 admet donc par f_n un unique antécédent, notons-le U_n et vérifie donc $f_n(U_n) = 0$.
Ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution U_n.

4)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$f_n(0) = -1 < 0$,

$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{n}} > 0$ car $-\frac{1}{n} < 0$ donne $e^{-\frac{1}{n}} < 1$,

$f_n(U_n) = 0$ par construction.

Donc $f_n(0) < f_n(U_n) < f_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

f_n étant strictement croissante, cela entraîne que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 < U_n < \dfrac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. D'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

5)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $f_n(U_n) = 0$, c'est-à-dire : $nU_n - e^{-U_n} = 0$.

On déduit que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ U_n = \dfrac{e^{-U_n}}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} e^{-x} = 1$. Par composée, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-U_n} = 1$.

Donc $e^{-U_n} \underset{+\infty}{\sim} 1$. Par quotient, $U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

6)$U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc[1] $U_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge car c'est une série de Riemann de paramètre $2 > 1$.

D'après le critère d'équivalence sur les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n^2$ converge.

★ ★ ★

Pour creuser un peu ...un résultat intéressant :

$$\boxed{\text{Soit } \sum_{n\geq 0} U_n \text{ une série à termes positifs. Si } \sum_{n\geq 0} U_n \text{ converge, alors } \sum_{n\geq 0} U_n^2 \text{ converge.}}$$

démo :
La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n$ converge donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.
Il existe donc un indice n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ U_n \leq 1$.
En multipliant membre à membre par $U_n \geq 0$, on obtient :
$\forall n \geq n_0,\ U_n^2 \leq U_n$.
D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n^2$ converge.

1. on peut appliquer une fonction puissance sur les deux membres d'un équivalent

Exercice 2 : (edhec 2004)

1)La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur $[0,1]$ donc U_n existe.

2)$U_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+2}dt = \left[\ln(t+2)\right]_0^1 = \ln 3 - \ln 2.$

$U_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2t+1}dt = \left[\frac{1}{2}\ln(2t+1)\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}.$

3)a)$\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in [0,1],\ t^{n+1} \leq t^n$, d'où $1+t+t^{n+1} \leq 1+t+t^n$.
Les deux membres étant positifs, on a par inverse :
$\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in [0,1],\ \dfrac{1}{1+t+t^{n+1}} \geq \dfrac{1}{1+t+t^n}.$
En intégrant cette inégalité entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^{n+1}}dt \geq \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt.$
Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} \geq U_n$, ce qui prouve que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
b)$\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in [0,1],\ 1+t+t^n \geq 1+t$ car $t^n \geq 0$.
Les deux membres étant positifs, on a par inverse :
$\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in [0,1],\ \dfrac{1}{1+t+t^n} \leq \dfrac{1}{1+t}.$
En intégrant cette inégalité entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt.$
Enfin, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln 2.$

On déduit que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \leq \ln 2$.

c)La suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et majorée (par $\ln 2$) donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

4)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln 2 - U_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}\right)dt \text{ par linéarité} \\
&= \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}dt.
\end{aligned}$$

b)$\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in [0,1],\ (1+t)(1+t+t^n) \geq 1.$

Par inverse $\dfrac{1}{(1+t)(1+t+t^n)} \leq 1.$

Puis en multipliant membre à membre par $t^n \geq 0$, on a finalement :

$\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in [0,1],\ \dfrac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} \leq t^n.$

En intégrant cette inégalité entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}dt \leq \int_0^1 t^n dt,$$

c'est-à-dire, grâce à la question 4)a) : $\ln 2 - U_n \leq \displaystyle\int_0^1 t^n dt$.

Enfin, $\displaystyle\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ \ln 2 - U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

c)Des questions 3)b) et 4)b), on tire :

$\ln 2 - \dfrac{1}{n+1} \leq U_n \leq \ln 2$.

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\ln 2 - \frac{1}{n+1}\right) = \ln 2$.

D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = \ln 2$.