RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée. En particulier un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entrainer très régulièrement à faire des calculs;

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,07 et un écart-type de 5,49, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice d'algèbre linéaire, permettait de vérifier les acquis des candidats sur les notions fondamentales d'algèbre du programme de première et deuxième année, à savoir le calcul matriciel, les applications linéaires et leur représentation matricielle. Il a été abordé par la quasi-intégralité des candidats, notamment grâce à sa position en début du sujet. Volontairement progressif, il était rédigé de manière à ce que les candidats comprennent les méthodes attendues dans chaque question parmi les choix possibles, mais cela n'a malheureusement pas été toujours le cas.

Partie A

1. (a) Certains candidats oublient d'élever au carré le facteur 1/3 devant la matrice A. Si c'est la seule erreur rencontrée (si les candidats ont écrit $3A^2$ au lieu de A^2), les candidats peuvent obtenir des points pour obtenir $A^3 = 0$ qui sera juste également.

(b) On attend des candidats plutôt qu'ils fassent appel à un (bon) polynôme annulateur et qu'ils en déduisent la bonne conclusion, à savoir que 0 est la seule valeur propre possible, comme l'indique le sujet.

Certains candidats maladroits manquent de recul et refont toute l'étude des valeurs propres en étudiant $A - \lambda I_3$; cela n'est pas pénalisé ici, la question ne demandant pas explicitement de déduire le résultat de la question précédente.

(c) La plupart des candidats se lance dans la résolution d'un système, en général avec succès. Le sujet demande explicitement une base, donc même si l'espace est engendré par un unique vecteur, on attend que le candidat écrive sur sa copie que le vecteur est non nul (ou qu'il a obtenu une famille libre) pour mentionner la dimension.

Les candidats manquant vraisemblablement de maîtrise dans le vocabulaire mathématique employé (confusions entre $\Leftrightarrow$ et $=$, confusions entre base et Vect, ...) sont sanctionnés.

(d) On attend ici un raisonnement complet de la part des candidats. Il n'y a aucun théorème au programme indiquant une caractérisation de la diagonalisabilité des endomorphismes ayant une unique valeur propre. En particulier, si les candidats énoncent la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité, ils n'obtiennent pas de point si ils disent que la somme des dimensions des sous-espaces propres doit être égale à $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$.

2. (a) La plupart des candidats montre correctement que la famille $\mathcal{B}'$ est libre, puis termine avec un argument de cardinalité. Sur ce point, les correcteurs sont intransigeants et pénalisent les candidats qui confondent les notions de cardinal et de dimension.

Certains candidats étudient l'inversibilité de la matrice associée aux trois vecteurs, et le font souvent correctement.

(b) La réponse étant donnée explicitement dans l'énoncé, on attend ici un détail des calculs par le candidat, preuve qu'il comprend manifestement ce qu'on attend de lui dans cette question.

3. (a) Cette question a dérouté de nombreux candidats qui ont oublié de prendre en compte le facteur 1/3 devant la matrice M.

(b) Cette question est notée en cohérence avec la question précédente, qui avait été peut-être été traitée de façon incorrecte.

(c) La question demandant explicitement d'utilisation la question 3(b), les candidats qui prouvaient que M était inversible par la méthode du pivot n'obtenaient pas tous les points. Il fallait faire le lien avec la matrice M'.

(d) Cette question a été bien traitée par les candidats qui avaient su développer correctement le calcul $(M - I)^3$.

(e) La formule du Binôme de Newton est moyennement connue des candidats, qui font de nombreuses erreurs dans son écriture générale.

Partie B

1. Cette question plutôt facile a parfois été mal comprise par les candidats. On attendait une explication minimale sur la deuxième partie de la question, à savoir que VT est la représentation matricielle de l'application $g \circ f$.

2. (a) Les candidats ont souvent soit bien compris ce qu'il s'agissait de montrer, et dans ce cas ont pu faire de même dans les deux questions suivantes, ou bien n'ont pas abordé du tout ces questions.

(b) Faite uniquement si (a) avait été faite.

(c) Faite également si (a) avait été faite.

(d) Cette question de synthèse aurait pu être abordée par certains candidats sérieux lisant le sujet jusqu'au bout, au moins pour le remplissage des deux premières colonnes de la matrice.

3. La plupart des candidats, même faibles, ont pu calculer V^2, puis poser le système d'équations associé à $V^2 = T$, mais peu ont su conclure correctement le raisonnement par l'absurde.

Exercice 2

Cet exercice d'analyse avait pour but d'étudier une fonction de deux variables, puis une suite implicite, tout en insérant de nombreuses questions d'informatique tout au long de l'étude. La première partie était assez originale sous sa forme, démarrant avec une sortie Scilab de courbes de niveaux, mais les calculs qui suivaient étaient classiques et aisés. La deuxième partie de l'exercice, plus technique, a été plutôt bien traitée par les candidats selon leur niveau de rigueur.

Partie A

1. Il est étonnant que les candidats proposent des résultats très étranges pour les coordonnées du point en lequel f semble admettre un minimum. On a souvent vu apparaître une valeur de 3.01 apparaître (tout autant acceptée que 3).
   On peut toutefois se féliciter que, même si la présence de lignes de niveaux est rare dans les sujets de concours, les candidats ont bien su interpréter le phénomène mis en valeur ici.
2. (a) Les candidats se contentant d'une réponse approximative ne peuvent pas obtenir tous les points ici. On attend a minima que les candidats précisent que les dénominateurs des fractions en présence sont toujours non nuls dans la fonction f.

   (b) Les calculs des dérivées partielles premières n'ont pas donné lieu à de grosses difficulté, ni la définition du point critique. Les candidats peinent cependant à résoudre leur système de manière très formelle, mais ceux qui ne font pas de résolution explicite et donnent le résultat n'obtiennent pas de point.

   (c) Les correcteurs attendent explicitement quatre calculs de dérivées partielles secondes. Si seuls trois calculs sont présents, on attend des candidats qu'ils citent le théorème de Schwarz, ou au moins le fait que la fonction soit de classe C^2 pour appliquer le théorème.

   (d) Les candidats ont bien en tête la méthode à mettre en œuvre, ce qui a donc conduit la majorité à bien répondre à cette question.

Partie B

1. On attend explicitement que les candidats citent la dérivabilité de la fonction h_n avant d'étudier le signe de sa dérivée, et donc de mentionner qu'ils utilisent la fonction $x \mapsto 1/x^n$ dérivable sur $]0, +\infty[$, ou bien que le dénominateur n'est jamais nul, ou bien qu'ils l'aient déjà correctement fait à la question A.2.(a). Lors de l'étude du signe de la dérivée, les candidats qui ne traitent que l'étude de l'équation $h'_n(x) = 0$ n'obtiennent pas de points.
2. Cette question a été dans l'ensemble bien traitée par les candidats. Les raisonnements pour u_n et v_n étant similaires ici, on accepte volontiers qu'un candidat traite l'existence de u_n en détail et dise « De même » pour l'existence de v_n.

3. (a) Cette question facile de calcul a été bien réalisée.
   (b) Question bien traitée lorsqu'elle est abordée.
   (c) Cette question plus délicate a été souvent bien abordée, signe que l'étude de suites implicites est classique et bien travaillée par les candidats.
4. (a) Cette question facile de synthèse a été bien traitée par les candidats.
   (b) À l'inverse, il fallait être plus fin pour percevoir le raisonnement en jeu dans cette question. Très peu de candidats ont su justifier la limite, et encore moins y voir une contradiction.
   (c) Cette question qui ne nécessitait qu'une bonne lecture des deux précédentes a été malheureusement très peu traitée.
5. (a) Le raisonnement était similaire à celui mis en place à la question 2, donc a été souvent bien fait.
   (b) L'écriture de la ligne calculant explicitement $h_n(x)$ par l'ordinateur ne posant pas vraiment de difficulté, les correcteurs examinent avec attention si les candidats comprennent ce que ce signifie le fait d'écrire une fonction. En particulier, les candidats n'ont pas à inclure de `input` une fois la fonction commencée, ni d'inclure un `disp` avant la fin de leur fonction.
   (c) Cette question, sur l'algorithme de dichotomie, fort classique, devrait être bien réalisée par la majorité des candidats, ce n'est cependant que le cas que pour une petite moitié d'entre eux.
   (d) On attendait ici des candidats qu'ils précisent qu'on a tracé la suite $((v_n)^n)$ et non (v_n).
   (e) Seuls les très bons candidats ont vu comment calculer $(v_n)^n$ d'après l'énoncé.

Exercice 3

Cet exercice, en deux parties successives, testait les candidats sur les probabilités continues vues en première et deuxième année. Par sa place en troisième position, il a été moins abordé que les deux autres exercices, sûrement faute de temps par les candidats. Mais il y avait beaucoup de points à obtenir, les candidats étant souvent à l'aise avec les variables aléatoires à densité qu'ils ont beaucoup manipulé en fin de deuxième année.

Partie A

1. De nombreux candidats tentent de maquiller leur raisonnement en insérant des signes négatifs de partout, sans réelle réflexion. Rappelons que de tels comportements sont toujours mal perçus par les correcteurs qui portent alors un regard suspicieux sur toute la suite de la copie.
2. Cette question de cours a été bien traitée par les candidats, qui ont souvent reconnu directement une intégrale de Riemann convergente.
3. (a) Les candidats pensent au bon changement de variable, ce qui leur permet de conclure sans difficulté sur l'égalité des intégrales, puis à la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$.
   (b) Les candidats savent en général bien ce qu'ils doivent montrer ici, mais ne le font pas vraiment en détail, affirmant leurs résultats plutôt que les justifiant. En particulier, on veut explicitement apparaître que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge avant de voir qu'elle vaut 1.

4. (a) Pour le calcul de $F_X(x)$ dans le cas où $x \leqslant -1$, on attend explicitement des candidats qu'ils passent par un calcul d'intégrale partielle, puis qu'ils en calculent la limite, sans quoi ils n'obtiennent aucun point à la question.
   (b) De même que dans les question précédentes, on ne tolère en aucun cas une quelconque égalité du type $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ldots = \int_1^{A} \ldots$ qui mettrait en lumière une confusion faite par le candidat entre intégrale généralisée et intégrale partielle. On peut tolérer que les candidats procèdent à un décourage (Chasles) avant d'avoir la convergence, mais l'étude de la convergence doit apparaître clairement à un moment.
   (c) Les remarques précédentes restent valables.
5. (a) Cette question délicate a été plutôt bien traitée. La plupart des candidats parvient bien à traduire l'événement $[|X| \leqslant x]$ en $[-x \leqslant X \leqslant x]$, dans ce cas ils ont le bon départ pour achever leur calcul.
   (b) On attend surtout ici que les candidats explicitent que la densité est (sauf éventuellement en quelques points) la dérivée de la fonction déterminée précédemment.
   (c) Le raisonnement est un peu similaire à celui fait aux questions précédentes, donc est peu rémunéré ici.

Partie B

1. (a) Les candidats reconnaissent souvent la loi de Bernoulli suivie par Z. Il faut faire attention cependant, on attend ici explicitement de déduire l'espérance de la variance de D de celles de Z. Les points ne sont donc pas donnés aux valeurs des espérances et des variances elles-mêmes, mais plutôt à la bonne application des formules donnant espérance et variance de $2Z - 1$.
   (b) Les candidats traitant la question pensent en général bien à préciser l'indépendance de D et Y.
   (c) On attend explicitement la formule des probabilités totales ou alors un découpage en union disjointe claire.
   (d) Il s'agit ici d'appliquer le calcul précédent, mais cela nécessitait d'avoir les bons résultats à la question 5.(a).
2. (a) Cette dernière question de cours a été traitée souvent, mais acceptée par les correcteurs uniquement dans le cas où elle soit donnée de manière complète (en trois morceaux).
   (b) Les candidats ont eu souvent du mal à manipuler les inégalités, et se sont vite retrouvés bloqués.
3. Peu de candidats ont abordé la question, sûrement faute de temps, la question étant placée en toute fin de sujet.