Corrrection DM3 cubes

Exercice 1 (inspiré d'eml 2013 option maths approfondies)

Partie I :

1)$A_0 = U_0^t V_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

La première et quatrième colonne de A_0 sont opposées donc $rg(A_0) \leq 3$.
$A_0 \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ a un rang différent de 4 donc A_0 n'est pas inversible.
Donc 0 est valeur propre de A_0.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R})$.

$X \in E_0(A_0) \iff A_0X = 0 \iff \begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 2x - 2y + 4z - 2t = 0 \\ 3x - 3y + 6z - 3t = 0 \\ 4x - 4y + 8z - 4t = 0 \end{cases} \iff x = y - 2z + t$.

Donc $E_0(A_0) = \left\{ \begin{pmatrix} y - 2z + t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, (y, z, t) \in \mathbf{R}^3 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc une famille génératrice de $E_0(A_0)$.

De plus, pour tous réels a, b et c, on a :

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a - 2b + c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

On conclut que c'est une base de $E_0(A_0)$.

2)On trouve $A_0U_0 = U_0$, ce qui prouve que U_0 (non nul) est vecteur propre de A_0 associé à la valeur propre 1. On a donc $dimE_1(A_0) \geq 1$.

Par ailleurs, d'après I)1), on a : $dimE_0(A_0) = 3$.

On a donc $dimE_0(A_0) + dimE_1(A_0) \geq 4$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A_0 ne pouvant dépasser 4, on a alors : $dimE_0(A_0) + dimE_1(A_0) = 4$.

Cela prouve d'après le théorème de réduction que A_0 est diagonalisable.

> Remarque
> On a donc après coup : $dimE_1(A_0) = 1$.

Partie II :

1)$U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ donc ${}^tV \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbf{R})$.
Par produit, $U^tV \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, c'est-à-dire $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
En notant $A = (a_{ij})$, le calcul du produit donne $a_{ij} = u_i v_j$.

2)Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, la j-ième colonne de A est : $\begin{pmatrix} u_1v_j \\ . \\ . \\ . \\ u_nv_j \end{pmatrix} = v_j \begin{pmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix} = v_jU.$

Comme $V \neq 0$, il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $v_j \neq 0$ et donc tel que $v_jU \neq 0$.

Les colonnes de A sont toutes colinéaires à v_jU car $\forall i \in [\![1,n]\!], v_iU = \dfrac{v_i}{v_j}(v_jU)$.

Donc $rg(A) = dim\text{Vect}\,(v_1U, ..., v_nU) = dim\text{Vect}\,\left(v_jU\right) = 1$.

La trace θ étant la somme des coefficients diagonaux de A, on a :
$\theta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i$.

3)$AU = \left(U^tV\right)U = U\left({}^tVU\right) = U\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_iu_i\right) = U\theta = \theta U$.

4)On suppose $\theta \neq 0$.

• Cherchons tout d'abord la dimension de $E_0(A)$.
Soit f l'endomorphisme[1] de $\mathbf{R}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
D'après le cours, on a : $dimImf = rg(A)$.
Or, d'après la question II)2), $rg(A) = 1$. Donc $dimImf = 1$.

Le théorème du rang donne ensuite : $dimKerf + dimImf = dim\mathbf{R}^n$.
Donc $dimKerf = n - 1$.

Enfin, $dimE_0(A) = dimE_0(f)$ et $E_0(f) = Kerf$. Donc $dimE_0(A) = n - 1$.

> Remarque
> On pouvait obtenir ce résultat en appliquant la propriété du cours (à la limite du programme) :
> $$dimE_\lambda(A) + rg(A - \lambda I) = n.$$
> Appliquée pour $\lambda = 0$, elle donne : $dimE_0(A) = n - 1$.

• On sait aussi d'après la question II)3 que U (non nul) est vecteur propre de A associé à la valeur propre θ. Donc $dimE_\theta(A) \geq 1$.

On a donc $dimE_0(A) + dimE_\theta(A) \geq n$.

Comme $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, la somme des dimensions des sous-espaces propres de A ne peut dépasser n.

Les sous-espaces propres $E_0(A)$ et $E_\theta(A)$ étant différents (c'est là qu'intervient l'hypothèse $\theta \neq 0$!), on peut conclure que :

$dimE_0(A) + dimE_\theta(A) = n$.

D'après le théorème de réduction, A est diagonalisable.

1. appelé endomorphisme canoniquement associé à A

Exercice 2 (eml 2017 option maths approfondies)

Partie I :

1)$H(x)$ est une intégrale impropre en $+\infty$.

• $1+t^2 \underset{+\infty}{\sim} t^2$ donc $\left(1+t^2\right)^x \underset{+\infty}{\sim} \left(t^2\right)^x$, puis $\dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2x}}$.

En prenant $x > 1/2$, on a $2x > 1$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x}} dt$ est alors convergente en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre strictement supérieur à 1.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^x} dt$ converge grâce au critère d'équivalence sur les intégrales de fonctions positives.

Puis, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\left(1+t^2\right)^x} dt$ converge car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^x}$ est continue sur $[0,1]$.

Par Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^x} dt$ converge. H est donc bien définie sur $]1/2,+\infty[$.

• Soient x et y deux réels de $]1/2,+\infty[$ avec $x \leq y$.

Pour tout $t \in\,]1/2,+\infty[$, on a :

$1+t^2 \geq 1$ donc $\ln\left(1+t^2\right) \geq 0$, puis $x\ln\left(1+t^2\right) \leq y\ln\left(1+t^2\right)$, c'est-à-dire :

$\ln\left(\left(1+t^2\right)^x\right) \leq \ln\left(\left(1+t^2\right)^y\right)$ donc $\left(1+t^2\right)^x \leq \left(1+t^2\right)^y$, puis $\dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^x} \geq \dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^y}$.

En intégrant entre les bornes croissantes 0 et $+\infty$, on déduit :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^x} dt \geq \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^y} dt$, soit $H(x) \geq H(y)$.

Donc H est décroissante sur $]1/2,+\infty[$.

2)Soit $A > 0$. Effectuons une IPP dans $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{\left(1+t^2\right)^x} dt$ en posant :

$$\begin{cases} u'(t) = 1 & v(t) = \dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^x} \\[2ex] u(t) = t & v'(t) = \dfrac{-2tx}{\left(1+t^2\right)^{x+1}} \end{cases}$$

u et v étant de classe C^1 sur $[0,A]$, l'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{1}{\left(1+t^2\right)^x} dt &= \left[\frac{t}{\left(1+t^2\right)^x}\right]_0^A - \int_0^A \frac{-2t^2x}{\left(1+t^2\right)^{x+1}} dt \\ &= \frac{A}{\left(1+A^2\right)^x} + 2x\int_0^A \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^{x+1}} dt. \end{aligned}$$

Dans l'intégrale de droite, on utilise l'astuce $t^2 = (1+t^2) - 1$, ce qui donne :

$$\int_0^A \frac{1}{\left(1+t^2\right)^x} dt = \frac{A}{\left(1+A^2\right)^x} + 2x\left(\int_0^A \frac{1}{\left(1+t^2\right)^x} dt - \int_0^A \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{x+1}} dt\right).$$

Passons à la limite dans l'égalité précédente en faisant tendre A vers $+\infty$.

$\dfrac{A}{\left(1+A^2\right)^x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{A}{A^{2x}} = \dfrac{1}{A^{2x-1}} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ car $2x-1>0$.

Quant aux intégrales, elles convergent puisque $x > 1/2$ et $x+1 > 1/2$.

On obtient alors : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^x}dt = 2x\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^x}dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{x+1}}dt\right)$,

c'est-à-dire $H(x) = 2x\left(H(x) - H(x+1)\right)$.

Cette égalité est vraie pour tout réel $x > 1/2$ donc aussi pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
Le remplacement $x \to n$ donne alors :

$\forall n \in \mathbf{N}^*, H(n) = 2n\left(H(n) - H(n+1)\right)$.

On déduit facilement que $\forall n \in \mathbf{N}^*, H(n+1) = \dfrac{2n-1}{2n}H(n)$.

3)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $H(n) = \dfrac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}$ ».

$\mathscr{P}(n)$ s'écrit : « $H(1) = \dfrac{\pi}{2}$ », ce qui est vrai par énoncé.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
H(n+1) &= \frac{2n-1}{2n}H(n)\\
&= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2} \text{ par hypothèse de récurrence}\\
&= \frac{(2n-1)!\pi}{2^{2n}(n-1)!(n-1)!n}\\
&= \frac{(2n-1)!(2n)\pi}{2^{2n}(n-1)!(n-1)!n \times (2n)}\\
&= \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*, H(n) = \dfrac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}$.

Partie II :

4)a)• φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme différence, composée et quotient de fonctions dérivables et $\forall u \in \mathbf{R}, \varphi'(u) = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2} > 0$.
φ est donc strictement croissante sur $\mathbf{R}$. Elle y est continue (car dérivable).
Elle réalise donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\varphi(\mathbf{R})$.
$\lim\limits_{u \to +\infty} e^u = +\infty$,
$\lim\limits_{u \to +\infty} -u = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, par composée : $\lim\limits_{u \to +\infty} e^{-u} = 0$,
Par différence $\lim\limits_{u \to +\infty} \left(e^u - e^{-u}\right) = +\infty$, puis $\lim\limits_{u \to +\infty} \varphi(u) = +\infty$.
De même, $\lim\limits_{u \to -\infty} \varphi(u) = -\infty$.
Les limites trouvées prouvent que $\varphi(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.
Ainsi, φ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\varphi(\mathbf{R})$.
• $\varphi(0) = 0$ donc $\varphi^{-1}(0) = 0$.
• φ^{-1} est une bijection croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi^{-1}(t) = +\infty$.

4)b)Soit $A > 0$. Dans $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{\left(1+t^2\right)^x} dt$, posons $t = \varphi(u)$.

$t = 0 \iff \varphi(u) = 0 \iff u = \varphi^{-1}(0) \iff u = 0$,
$t = A \iff \varphi(u) = A \iff u = \varphi^{-1}(A)$.
$\dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^x} = \dfrac{1}{\left(1+\varphi(u)^2\right)^x}$.
$dt = \varphi'(u)du = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2} du$.
φ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. La formule de changement de variable est licite et donne :
$$\int_0^A \frac{1}{\left(1+t^2\right)^x} dt = \int_0^{\varphi^{-1}(A)} \frac{1}{\left(1+\varphi(u)^2\right)^x} \times \frac{e^u + e^{-u}}{2} du \qquad (*)$$
Or, $1+\varphi(u)^2 = 1+\left(\dfrac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 = 1+\dfrac{e^{2u} - 2 + 2e^u}{4} = \dfrac{e^{2u} + 2 + e^u}{4} = \left(\dfrac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2$.
En reportant dans $(*)$ et en simplifiant, on obtient :
$$\int_0^A \frac{1}{\left(1+t^2\right)^x} dt = \frac{4^x}{2} \int_0^{\varphi^{-1}(A)} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} du.$$
En passant à la limite quand $A \to +\infty$, on obtient :
$$H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} du.$$

5)a)$\forall u \geq 0, e^u \leq e^u + e^{-u} \leq 2e^u \iff 0 \leq e^{-u} \leq e^u$.
L'inégalité de gauche est vraie car une exponentielle est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.
Celle de droite est équivalente à : $-u \leq u$, ce qui est vrai car $u \geq 0$.
Donc $\forall u \geq 0, e^u \leq e^u + e^{-u} \leq 2e^u$.

5)b)Soit $x > 1/2$.
Comme $2x-1>0$, la fonction $t \mapsto t^{2x-1}$ est croissante sur $\mathbf{R}_+$.
De II)5)a), on tire alors $\forall u \geq 0, \left(e^u\right)^{2x-1} \leq \left(e^u + e^{-u}\right)^{2x-1} \leq \left(2e^u\right)^{2x-1}$.
Par inverse, $\dfrac{1}{\left(e^u\right)^{2x-1}} \geq \dfrac{1}{\left(e^u+e^{-u}\right)^{2x-1}} \geq \dfrac{1}{\left(2e^u\right)^{2x-1}}$,
c'est-à-dire, $\dfrac{2}{4^x}e^{-u(2x-1)} \leq \dfrac{1}{\left(e^u+e^{-u}\right)^{2x-1}} \leq e^{-u(2x-1)} \qquad (*)$
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u(2x-1)}du$ converge car du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha u}du$ avec $\alpha > 0$.
En intégrant $(*)$ entre les bornes croissantes 0 et $+\infty$, on déduit :
$\displaystyle\frac{2}{4^x}\int_0^{+\infty} e^{-u(2x-1)}du \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(e^u+e^{-u}\right)^{2x-1}}du \leq \int_0^{+\infty} e^{-u(2x-1)}du.$
Ce qui donne, compte tenu de la question II)4)b) :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u(2x-1)}du \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-u(2x-1)}du.$
Enfin, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u(2x-1)}du = \lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} e^{-u(2x-1)}du = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{-u(2x-1)}}{-(2x-1)}\right]_0^A = \frac{1}{2x-1}.$

Finalement, $\forall x > 1/2, \dfrac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \dfrac{4^x}{2(2x-1)}$.

$\displaystyle\lim_{x\to(1/2)^+}\frac{1}{2x-1} = +\infty$. Par passage à la limite, $\displaystyle\lim_{x\to(1/2)^+} H(x) = +\infty$.

6)Des inégalités précédentes, on tire : $\forall x > 1/2, 1 \leq (2x-1)H(x) \leq \dfrac{4^x}{2}$.

$\displaystyle\lim_{x\to(1/2)^+}\frac{4^x}{2} = 1$. D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to(1/2)^+}(2x-1)H(x) = 1$.

Ainsi, $H(x) \underset{(1/2)^+}{\sim} \dfrac{1}{2x-1}$.