Exercice 1 (ecricome 2022)

Partie I

1)Toute matrice de F s'écrit sous la forme $a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels quelconques.

Donc $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F.

Elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires.
C'est donc une base de F et $dimF = 2$.

2)$I_3 \in G$ car $I_3^2 = I_3$, mais $2I_3 \notin G$ car $(2I_3)^2 = 4I_3 \neq I_3$.

Donc G n'est pas stable pour la multiplication externe, ce qui prouve que G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

3)a)$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \in F$ (prendre $a = 2/3$ et $b = -1/3$).

De plus, on a :

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/9 & -3/9 & -3/9 \\ -3/9 & 6/9 & -3/9 \\ -3/9 & -3/9 & 6/9 \end{pmatrix}.$$

Donc $A^2 = A$, ce qui prouve que $A \in G$.

Ainsi, $A \in F \cap G$.

b)Posons $P(X) = X^2 - X$.
On a : $P(A) = A^2 - A = 0$. Donc P est un polynôme annulateur de A.

c)Les racines de P sont 0 et 1. Donc $sp(A) \subset \{0, 1\}$.

• $E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}(A - I)U = 0 &\iff \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x + y + z = 0 \\ &\iff x = -y - z.\end{aligned}$$

En injectant au départ :

$$\begin{aligned}
E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -y - z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbf{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbf{R}^2 \right\} \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_1(A)$.

Elle est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $E_1(A)$ et $dimE_1(A) = 2$.

• $E_0(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid AU = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
AU = 0 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 & L_1 \\ \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 & L_2 \\ \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 & L_3 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 & L_1 \\ y - z = 0 & L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ -y + z = 0 & L_3 \leftarrow L_1 + 2L_3 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_0(A)$.

Elle est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_0(A)$ et $dimE_0(A) = 1$.

d)0 est valeur propre de A donc A n'est pas inversible.

$A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et $dimE_0(A) + dimE_1(A) = 3$. Donc A est diagonalisable, d'après le théorème de réduction.

Partie II

4)a)Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M \in G &\Longleftrightarrow M^2 = M \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & b^2+2ab & b^2+2ab \\ b^2+2ab & a^2+2b^2 & b^2+2ab \\ b^2+2ab & b^2+2ab & a^2+2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b^2+2ab = b \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

b)On résout le système précédent.
La deuxième équation donne $b = 0$ ou $b + 2a - 1 = 0$.

- si $b = 0$

Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} a^2 = a \\ b = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ ou } a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont les couples $(1, 0)$ et $(0, 0)$.

- si $b + 2a - 1 = 0$

Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b+2a-1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+2(1-2a)^2 = a \\ b = 1-2a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 9a^2-9a+2 = 0 \ (E) \\ b = 1-2a \end{cases}$$

Les racines de (E) sont $a_1 = \dfrac{9-\sqrt{9}}{2\times 9} = \dfrac{1}{3}$ et $a_1 = \dfrac{9+\sqrt{9}}{2\times 9} = \dfrac{2}{3}$.

Pour $a = \dfrac{1}{3}$, on trouve $b = \dfrac{1}{3}$.

Pour $a = \dfrac{2}{3}$, on trouve $b = -\dfrac{1}{3}$.

Les solutions sont les couples $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ et $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$.

$F \cap G$ est donc l'ensemble des 4 matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où (a, b) est l'un des 4 couples trouvés.

$$\begin{aligned} F \cap G &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}. \end{aligned}$$

5)$B = I_3 - A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \in F$ et $A \in F$.

La famille (A, B) est une famille de deux vecteurs de F, elle est libre car ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Le cardinal de cette famille coïncide avec la dimension de F qui vaut 2.
Donc (A, B) est une base de F.

6)a)Posons $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$.

$$\begin{aligned}
\alpha A + \beta B &= (a-b)A + (a+2b)B \\
&= (a-b)\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + (a+2b)\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(a-b) + \frac{1}{3}(a+2b) & -\frac{1}{3}(a-b) + \frac{1}{3}(a+2b) & -\frac{1}{3}(a-b) + \frac{1}{3}(a+2b) \\ -\frac{1}{3}(a-b) + \frac{1}{3}(a+2b) & \frac{2}{3}(a-b) + \frac{1}{3}(a+2b) & -\frac{1}{3}(a-b) + \frac{1}{3}(a+2b) \\ -\frac{1}{3}(a-b) + \frac{1}{3}(a+2b) & -\frac{1}{3}(a-b) + \frac{1}{3}(a+2b) & \frac{2}{3}(a-b) + \frac{1}{3}(a+2b) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\
&= M.
\end{aligned}$$

b)$AB = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$BA = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c)On fait une récurrence.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $I_3 = A + B$ », ce qui est vrai car $B = I_3 - A$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n M \\
&= (\alpha^n A + \beta^n B)(\alpha A + \beta B) \quad \text{par HR et grâce à 6)a)} \\
&= \alpha^{n+1} A^2 + \alpha^n \beta \underbrace{AB}_{=0} + \beta^n \alpha \underbrace{BA}_{=0} + \beta^{n+1} B^2 \\
&= \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B.
\end{aligned}$$

En effet, A et B sont dans G (voir 4)b)). Donc $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

$\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.

7)a)En raisonnant par contraposée, cela revient à montrer que

M n'est pas inversible $\Longleftrightarrow \alpha = 0$ ou $\beta = 0$, c'est-à-dire :

M n'est pas inversible $\Longleftrightarrow a - b = 0$ ou $a + 2b = 0$ (C)

Distinguons deux cas.

• $b=0$

Alors, $M=aI$ et M n'est pas inversible $\iff a=0$. La condition (C) est vérifiée.

• $b\neq 0$

On transforme M par la méthode de Gauss.

$$M=\begin{pmatrix} a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}\begin{array}{l} L_1\\ L_2\\ L_3\end{array}$$

$$M=\begin{pmatrix} b & a & b\\ a & b & b\\ b & b & a\end{pmatrix}\begin{array}{c} L_1\longleftrightarrow L_2\\ L_2\longleftrightarrow L_1\\ L_3\end{array}$$

$$M=\begin{pmatrix} b & a & b\\ 0 & b^2-a^2 & b^2-ab\\ 0 & b-a & a-b\end{pmatrix}\begin{array}{c} L_1\\ L_2\longleftarrow bL_2-aL_1 \quad (\text{valide car } b\neq 0)\\ L_3\longleftarrow L_3-L_1\end{array}$$

$$M=\begin{pmatrix} b & a & b\\ 0 & b-a & a-b\\ 0 & b^2-a^2 & b^2-ab\end{pmatrix}\begin{array}{c} L_1\\ L_2\longleftrightarrow L_3\\ L_3\longleftrightarrow L_2\end{array}$$

$$M=\begin{pmatrix} b & a & b\\ 0 & b-a & a-b\\ 0 & 0 & a^2+ab-2b^2\end{pmatrix}\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\longleftrightarrow (b+a)L_2-L_3\end{array}$$

$$\begin{aligned} M \text{ n'est pas inversible } &\iff b-a=0 \text{ ou } a^2+ab-2b^2=0\\ &\iff b-a=0 \text{ ou } (a+2b)(a-b)=0\\ &\iff a-b=0 \text{ ou } a+2b=0.\end{aligned}$$

Et la condition (C) est vérifiée.

7)b)Comme α et β sont tous les deux non nuls, M est inversible.

Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} M^n\left(\alpha^{-n}A+\beta^{-n}B\right) &= (\alpha^nA+\beta^nB)\left(\alpha^{-n}A+\beta^{-n}B\right)\\ &= \underbrace{\alpha^n\alpha^{-n}}_{=1}A^2+\alpha^n\beta^{-n}\underbrace{AB}_{=0}+\beta^n\alpha^{-n}\underbrace{BA}_{=0}+\underbrace{\beta^n\beta^{-n}}_{=1}B^2\\ &= A^2+B^2\\ &= A+B\\ &= I_3.\end{aligned}$$

Donc M^n est inversible et $M^{-n}=(M^n)^{-1}=\alpha^{-n}A+\beta^{-n}B$.

Remarque

On pouvait aussi faire une récurrence en vérifiant au préalable que
$M^{-1}=\alpha^{-1}A+\beta^{-1}B$.

Pour l'hérédité, on écrivait :

$M^{-(n+1)}=M^{-n}M^{-1}=(\alpha^{-n}A+\beta^{-n}B)\left(\alpha^{-1}A+\beta^{-1}B\right)=\cdots$

Partie III

8)$I_3 - T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

C'est une matrice de F avec $a = -2$ et $b = -1$. La question 6)a) donne alors :
$I_3 - T = \alpha A + \beta B = (a-b)A + (a+2b)B = -A - 4B$.

9)$I_3 - T$ est inversible d'après 7)a) car $\alpha = -1 \neq 0$ et $\beta = -4 \neq 0$.
La question 7)b) avec $n = 1$ donne :

$$\begin{aligned}
(I_3 - T)^{-1} &= \alpha^{-1}A + \beta^{-1}B \\
&= -A - \frac{1}{4}B \\
&= -\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -3/4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

10)$L = TL + Y \iff L - TL = Y \iff (I_3 - T)L = Y \iff L = (I_3 - T)^{-1}Y$.
D'où l'unicité de L.
De plus, $L = (I_3 - T)^{-1}Y = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

11)•Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $X_{n+1} = TX_n + Y$ et $L = TL + Y$.
En soustrayant membre à membre ces égalités, on a :
$X_{n+1} - L = TX_n + Y - TL - Y = T(X_n - L)$.
• Par récurrence. On pose $\mathscr{P}(n)$: « $X_n - L = T^n(X_0 - L)$ ».
$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $X_0 - L = T^0(X_0 - L)$ », c'est vrai car $T^0 = I_3$.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Suppsons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
X_{n+1} - L &= T(X_n - L) \quad \text{début de question} \\
&= TT^n(X_0 - L) \quad \text{par HR} \\
&= T^{n+1}(X_0 - L).
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ X_n - L = T^n(X_0 - L)$

12)La question 8) donne : $I_3 - T = -A - 4B$.
Donc $T = I_3 + A + 4B = (A + B) + A + 4B = 2A + 5B$.
En remplaçant T dans l'égalité de la question 11), on conclut :

$$X_n = L + (2A + 5B)^n (X_0 - L).$$

Exercice 2 (ecricome 2011)

Partie I

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln x = +\infty$.
Par différence, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$.

2)φ est continue sur $]0,+\infty[$ car elle est construite sur cet intervalle comme différence et produit de fonctions continues.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x = 0$ par croissances comparées. Par différence, $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = 1$.

Or, $\varphi(0) = 1$. On a donc établi que $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \varphi(0)$, ce qui montre la continuité à droite en 0.

On conclut que φ est continue sur $[0,+\infty[$.

3)φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ car elle est construite sur cet intervalle comme différence et produit de fonctions dérivables.

$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = -\left(2x\ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x}\right) = -2x\ln x - x = x(-2\ln x - 1)$.

4)$\forall x > 0,\ \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \dfrac{\left(1 - x^2\ln x\right) - 1}{x} = -x\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.

5)Pour tout $x > 0$, $\varphi'(x)$ est du signe de $-2\ln x - 1$.

Donc $\varphi'(x) \geq 0 \iff -2\ln x - 1 \geq 0 \iff 2\ln x \leq -1 \iff \ln x \leq -\dfrac{1}{2}$
$\iff x \leq e^{-\frac{1}{2}}$.

φ est donc croissante sur $\left[0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$, puis décroissante sur $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	1	$\nearrow$	$1+\dfrac{1}{2e}$	$\searrow$	$-\infty$

$\varphi\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 - e^{-1} \times \left(\dfrac{-1}{2}\right) = 1 + \dfrac{1}{2e}$.

6)• φ est positive sur $\left[0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ donc ne peut s'annuler sur cet intervalle.

• φ est continue et strictement décroissante sur $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$. Elle réalise donc une bijection de $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$ sur $\varphi\left(\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[\right) = \left]-\infty, 1 + \dfrac{1}{2e}\right]$.

$0 \in \left]-\infty, 1 + \dfrac{1}{2e}\right]$ admet un unique antécédent $\alpha \in \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$ par φ.

Ainsi, il existe un unique réel α tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

• $\varphi(\sqrt{2}) = 1 - 2\ln\sqrt{2} = 1 - 2\ln\left(2^{1/2}\right) = 1 - 2 \times \dfrac{1}{2}\ln 2 = 1 - \ln 2 \approx 0,3$

$\varphi(2) = 1 - 4\ln 2 \approx 1 - 4 \times 0,7 \approx -1,8$

On a donc : $\varphi(2) < \underbrace{\varphi(\alpha)}_{=0} < \varphi(\sqrt{2})$.

Comme φ est strictement décroissante sur $\left[\sqrt{2}, 2\right]$, on déduit : $\sqrt{2} < \alpha < 2$.

7)L'intégrale I n'est pas vraiment impropre en 0 car φ est bien continue sur $[0, \alpha]$. Donc l'intégrale I converge.

A cause du logarithme, on va devoir s'éloigner de zéro pour la calculer.

Soit $A > 0$. Calculons $\displaystyle\int_A^\alpha \varphi(x)dx$.

$$\int_A^\alpha \varphi(x)dx = \int_A^\alpha 1dx - \int_A^\alpha x^2\ln x = (\alpha - A) - \int_A^\alpha x^2 \ln x \quad (*)$$

On calcule ensuite $\displaystyle\int_A^\alpha x^2\ln x$ à l'aide d'une IPP en posant :

$u'(x) = x^2 \qquad v(x) = \ln x$

$u(x) = \dfrac{x^3}{3} \qquad v'(x) = \dfrac{1}{x}$

u et v sont de classe C^1 sur $[A, \alpha]$. L'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned}\int_A^\alpha x^2\ln x &= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_A^\alpha - \int_A^\alpha \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x}dx \\ &= \frac{\alpha^3}{3}\ln\alpha - \frac{A^3}{3}\ln A - \frac{1}{3}\int_A^\alpha x^2dx \\ &= \frac{\alpha^3}{3}\ln\alpha - \frac{A^3}{3}\ln A - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_A^\alpha \\ &= \frac{\alpha^3}{3}\ln\alpha - \frac{A^3}{3}\ln A - \frac{\alpha^3}{9} + \frac{A^3}{9}.\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{A\to 0^+} \frac{A^3}{3}\ln A = 0$ par croissances comparées et $\displaystyle\lim_{A\to 0^+}\frac{A^3}{9} = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{A\to 0^+}\int_A^\alpha x^2\ln x = \frac{\alpha^3}{3}\ln\alpha - \frac{\alpha^3}{9}$.

En passant à la limite dans $(*)$ quand $A \to 0^+$, on conclut que

$$I = \lim_{A\to 0^+}\int_A^\alpha \varphi(x)dx = \alpha - \left(\frac{\alpha^3}{3}\ln\alpha - \frac{\alpha^3}{9}\right)$$

C'est-à-dire, $I = \alpha - \dfrac{\alpha^3}{3}\ln\alpha + \dfrac{\alpha^3}{9}$.

Enfin, comme $\varphi(\alpha) = 0$, on a : $1 - \alpha^2\ln\alpha = 0$, d'où $\alpha^2\ln\alpha = 1$.

En reportant dans la valeur de I trouvée au dessus, on a :

$$I = \alpha - \frac{\alpha}{3} \times \underbrace{\alpha^2\ln\alpha}_{=1} + \frac{\alpha^3}{9} = \frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{9} = \frac{\alpha(6+\alpha^2)}{9}.$$

8)a)fonction Python :

```
import numpy as np
def phi(x):
    return 1-x**2*np.log(x)
```

b)programme Python :

```
import numpy as np
a=np.sqrt(2)
b=2
for k in range(7):
    if phi(a)*phi((a+b)/2)<0:
        b=(a+b)/2
    else:
        a=(a+b)/2
print(a,b)
```

Remarque
Ce programme permet de trouver par dichotomie un encadrement de α.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $a_n < \alpha < b_n$.

En exécutant le programme, on trouve $a_7 \approx 1.528$ et $b_7 \approx 1.533$

Partie II

1)La fonction $(x, y) \mapsto xy$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Le logarithme étant de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, les fonctions $(x, y) \mapsto \ln x$ et $(x, y) \mapsto \ln y$ sont de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Par produit, la fonction $(x, y) \mapsto (\ln x)(\ln y)$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Par somme, f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

2)Pour tout $x > 0$ et $y > 0$, on a :

$\partial_1 f(x, y) = y + \dfrac{1}{x} \ln y$ et $\partial_2 f(x, y) = x + \dfrac{1}{y} \ln x$.

Les points critiques de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y + \dfrac{1}{x} \ln y = 0 \\ \\ x + \dfrac{1}{y} \ln x = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} xy + \ln y = 0 & L_1 \\ xy + \ln x = 0 & L_2 \end{array}\right.$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_1 - L_2$, le système est équivalent à :

$$\iff \left\{\begin{array}{c} xy + \ln y = 0 \\ \ln y - \ln x = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} xy + \ln y = 0 \\ \ln y = \ln x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x^2 + \ln x = 0 \\ y = x \end{array}\right.$$

Il reste à remarquer que pour tout $x > 0$, on a :

$\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 + \dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{x^2 + \ln x}{x^2}$.

Donc $x^2 + \ln x = 0 \iff \varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0 \iff \dfrac{1}{x} = \alpha \iff x = \dfrac{1}{\alpha}$.

La solution du système est donc $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$, c'est l'unique point critique de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

3)Remarquons d'abord que $\forall t > 0,\ 1-\varphi\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\ln t}{t^2}$.
Pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, on a :
$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \partial_1\left(y + \frac{1}{x}\ln y\right) = -\frac{\ln y}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} \times \left(-\frac{\ln y}{y^2}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \left(1-\varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right)$.
$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial_1\left(x + \frac{1}{y}\ln x\right) = 1 + \frac{1}{xy}$,
D'après le théorème de Schwarz, $\partial^2_{2,1} f(x,y) = \partial^2_{1,2} f(x,y)$.
$\partial^2_{2,2} f(x,y) = \partial_2\left(x + \frac{1}{y}\ln x\right) = -\frac{\ln x}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} \times \left(-\frac{\ln x}{x^2}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(1-\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

4)Si f possède un extrémum local, ce ne peut être qu'au point critique $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ trouvé précédemment.
La matrice hessienne de f en ce point vaut :
$$\begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) & \partial^2_{1,2} f\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) \\ \partial^2_{2,1} f\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) & \partial^2_{2,2} f\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\varphi(\alpha) & 1+\alpha^2 \\ 1+\alpha^2 & 1-\varphi(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha^2 \\ 1+\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}.$$
λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha^2 \\ 1+\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$
$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1+\alpha^2 \\ 1+\alpha^2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible
$\Longleftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) - (1+\alpha^2)(1+\alpha^2) = 0$
$\Longleftrightarrow (1-\lambda)^2 = (1+\alpha^2)^2$
$\Longleftrightarrow 1-\lambda = 1+\alpha^2$ ou $-1-\alpha^2$.
Les deux valeurs propres sont non nulles et de signes contraires. Donc f n'a pas d'extrémum local en $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ et donc pas d'extrémum local sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Exercice 3 (ecricome 2011)

Partie I

1)Place trois jetons sur la grille revient à construire une combinaison de 3 cases de l'ensemble des 9 cases, ce qui peut se faire de $\binom{9}{3}$ façons.

Or, $\binom{9}{3} = \dfrac{9!}{6!3!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$.

2)Il y a 3 lignes donc 3 possibilités de mettre les jetons horizontalement. Donc $P(H) = \dfrac{3}{84}$.

Il y a 3 colonnes donc 3 possibilités de mettre les jetons verticalement.

Donc $P(V) = \dfrac{3}{84}$.

Il y a 2 diagonales donc 2 possibilités de mettre les jetons en diagonale. Donc $P(D) = \dfrac{2}{84}$.

3)La famille d'événements (H, V, D, N) forme un système complet.

Donc $P(N) = 1 - P(H) - P(V) - P(D) = 1 - \dfrac{8}{84} = \dfrac{76}{84} = \dfrac{19}{21}$.

4)a)A chaque relance, le joueur peut perdre 2 euros ou en gagner 18, la société peut gagner 2 euros ou en perdre 18.

Donc $\forall i \in \mathbf{N}^*,\ Z_i(\Omega) = \{-18, 2\}$.

$P(Z_i = 2) = P(N) = \dfrac{19}{21}$ et $P(Z_i = -18) = 1 - P(Z_i = 2) = \dfrac{2}{21}$.

On déduit : $E(Z_i) = 2P(Z_i = 2) - 18P(Z_i = -18) = 2 \times \dfrac{19}{21} - 18 \times \dfrac{2}{21} = \dfrac{2}{21}$.

b)$Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{10000} Z_i$. Par linéarité de l'espérance :

$E(Z) = \displaystyle\sum_{i=1}^{10000} E(Z_i) = \sum_{i=1}^{10000} \frac{2}{21} = \frac{20000}{21} \approx 1000$.

La société peut donc espérer gagner environ 1000 euros par jour.

Partie II

1)a)Les 100 parties sont successives, identiques et indépendantes. A chaque partie, la probabilité de succès (= gain de la partie) vaut $\dfrac{2}{21}$.

X compte le nombre de succès.

Donc $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(100, \dfrac{2}{21}\right)$.

b)Le cours donne : $E(X) = 100 \times \dfrac{2}{21} = \dfrac{200}{21}$ et $V(X) = 100 \times \dfrac{2}{21} \times \dfrac{19}{21}$.

c)Le joueur gagne 18 euros pour chacune des X parties gagnées et perd 2 euros pour chacune des $100 - X$ parties perdues.

Donc $T = 18X - 2(100 - X) = 20X - 200$.

Remarque

Si $T < 0$, c'est vraiment une perte. Si $T > 0$, c'est un gain !

2)La probabilité pour que le joueur ne gagne aucune partie sur n parties jouées est $\left(\dfrac{19}{21}\right)^n$, les n parties étant indépendantes.

La probabilité pour que le joueur gagne au moins une partie sur n parties jouées est donc $1 - \left(\dfrac{19}{21}\right)^n$.

$$1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n \geq \frac{1}{2} \iff \left(\frac{19}{21}\right)^n \leq \frac{1}{2} \iff \ln\left(\left(\frac{19}{21}\right)^n\right) \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\iff n \ln\left(\frac{19}{21}\right) \leq -\ln 2 \iff n \geq \frac{-\ln 2}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)} \approx 7 \quad \text{car } \ln\left(\frac{19}{21}\right) < 0.$$

Il faut donc jouer au moins 7 parties.

3)a)L'expérience aléatoire est constituée d'un certain nombre de parties successives, identiques et indépendantes. A chaque partie, la probabilité de succès (= gain de la partie) vaut $\dfrac{2}{21}$.

Y compte le rang d'obtention du premier succès.

Donc $Y \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{2}{21}\right)$.

b)Le cours donne : $E(Y) = \dfrac{1}{\frac{2}{21}} = \dfrac{21}{2}$ et $V(Y) = \dfrac{1 - \frac{2}{21}}{\left(\frac{2}{21}\right)^2} = \dfrac{19 \times 21}{4}$.

c)L'événement contraire est : « le joueur perd les k première parties ».

La probabilité de cet événement est $\left(\dfrac{19}{21}\right)^k$ du fait de l'indépendance.

D'où $p_k = 1 - \left(\dfrac{19}{21}\right)^k$.

Partie III

1)Supposons Δ réalisé. Un jeton est alors placé dans la case A1.
Il reste alors 2 jetons à placer, ce qui revient à choisir 2 cases parmi les 8 restantes, soit $\binom{8}{2} = \dfrac{8!}{6!2!} = \dfrac{8 \times 7}{2} = 28$ choix.

Pour réaliser H, il faut placer les 2 jetons restants sur la ligne A, ce qui ne peut se faire que d'une seule façon.

Donc $P_\Delta(H) = \dfrac{1}{28}$.

C'est le même raisonnement pour les deux autres événements.

Au final, $P_\Delta(H) = P_\Delta(V) = P_\Delta(D) = \dfrac{1}{28}$.

2)La formule des probabilités totales pour le sce $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ s'écrit :

$P(N) = P_\Delta(N)P(\Delta) + P_{\overline{\Delta}}(N)P(\overline{\Delta})$

Avec $P_\Delta(N) = 1 - P_\Delta(H) - P_\Delta(V) - P_\Delta(D) = 1 - \dfrac{3}{28} = \dfrac{25}{28}$,

et $P_{\overline{\Delta}}(N) = \dfrac{19}{21}$ car si la fonction aléatoire n'est pas déréglée, on se ramène à la probabilité trouvée dans la partie I.

On déduit : $P(N) = \dfrac{25}{28}x + \dfrac{19}{21}(1-x) = \left(\dfrac{25}{28} - \dfrac{19}{21}\right)x + \dfrac{19}{21} = -\dfrac{x}{84} + \dfrac{19}{21}$.

3)$G(\Omega) = \{-18, 2\}$.

$P(G=2) = P(N) = -\dfrac{x}{84} + \dfrac{19}{21}$ et $P(G=-18) = 1 + \dfrac{x}{84} - \dfrac{19}{21} = \dfrac{x}{84} + \dfrac{2}{21}$.

$$\begin{aligned} E(G) &= 2P(G=2) - 18P(G=-18) \\ &= 2\left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21}\right) - 18\left(\frac{x}{84} + \frac{2}{21}\right) \\ &= -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21}. \end{aligned}$$

$E(G) > 0 \iff -\dfrac{20}{84}x + \dfrac{2}{21} > 0 \iff \dfrac{20}{84}x < \dfrac{2}{21} \iff x < \dfrac{2\times 84}{20\times 21} = \dfrac{2}{5}$.

La valeur maximale de x pour laquelle $E(G) > 0$ est donc $2/5$.

4)La probabilité cherchée est :

$$P_{\overline{N}}(\Delta) = \frac{P_\Delta(\overline{N})P(\Delta)}{P(\overline{N})} = \frac{\left(1 - \frac{25}{28}\right)x}{1 - \left(-\dfrac{x}{84} + \dfrac{19}{21}\right)} = \cdots = \frac{9x}{x+8}.$$