Chapitre 7 : compléments sur les séries

I)Généralités

Déf : soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite.
Pour tout entier $n \geq 0$, on définit la somme partielle d'ordre n par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k.$$

La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est alors appelée série de terme général U_n et notée $\sum_{n\geq 0} U_n$.

Propriété 1
1)$\forall n \in \mathbf{N},\ S_{n+1} - S_n = U_{n+1}$.
2)Si la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est positive, alors $(S_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

> Remarque
> Si la suite (U_n) n'est définie qu'à partir de n_0, on pose : $\forall n \geq n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} U_k$.

II)Nature d'une série

Déf : on dit que la série de terme général U_n est convergente si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est convergente, autrement dit si $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe et est finie.
La limite de $(S_n)_{n\geq 0}$ est appelée somme de la série et notée $\sum_{k=0}^{+\infty} U_k$. On a donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} U_k = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} U_k \right).$$

<u>Exercice 1</u>
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ est convergente et calculer sa somme.

III)Autour de la convergence

Propriété 2
Si la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Propriété 3
Si $\lim_{n\to+\infty} U_n \neq 0$, alors la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ diverge.

Propriété 4
Soient a et b des réels.
Si les séries $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ convergent, alors, la série $\sum_{n\geq 0} (aU_n + bV_n)$ converge.
De plus, $\sum_{k=0}^{+\infty} (aU_k + bV_k) = a \left(\sum_{k=0}^{+\infty} U_k \right) + b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} V_k \right)$.

IV)Convergence absolue

Déf : on dit que la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ est absolument convergente si la série $\sum_{n\geq 0} |U_n|$ converge.

Propriété 5
Toute série absolument convergente est convergente.

> Remarque
> La réciproque est fausse. Exemple : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

V)Séries géométriques

Déf : pour tout nombre réel q, on définit les séries suivantes :

$\sum_{n\geq 0} q^n$ *série géométrique*

$\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ *série géométrique dérivée première*

$\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ *série géométrique dérivée seconde.*

Théorème 1
Ces séries convergent si et seulement si $-1 < q < 1$. Et on a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

<u>Exercice 2</u>
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{5\times 2^n + 2\times 3^n}{4^n}\right)$ est convergente et calculer sa somme.

VI)Série exponentielle

Déf : pour tout nombre réel x, on définit la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, appelée série exponentielle.

Théorème 2
Quel que soit $x \in \mathbf{R}$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

<u>Exercice 3</u>
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$ est convergente et calculer sa somme.

VII)Série télescopique

Déf : on appelle série télescopique toute série du type $\sum\limits_{n\geq 0}(V_n - V_{n+1})$ ou $\sum\limits_{n\geq 0}(V_{n+1} - V_n)$, dans laquelle $(V_n)_{n\geq 0}$ est une suite donnée.

Propriété 6
La série télescopique converge si et seulement si la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ converge.

Remarque

Ce résultat provient du fait que $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(V_k - V_{k+1}) = V_0 - V_{n+1}$.

Exercice 4
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

VIII)Série de Riemann

Déf : pour $\alpha \in \mathbf{R}$, on définit $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ appelée série de Riemann de paramètre α.

Théorème 3
La série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

IX)Critères de convergences des séries à termes positifs

Tous les théorèmes de ce paragraphe ne s'appliquent que pour des séries dont le terme général est **positif** à partir d'un certain rang.

Théorème 4 (critère de comparaison)
Soient $(U_n)_{n\geq 0}$ et $(V_n)_{n\geq 0}$ deux suites telles que $\forall n \geq n_0,\ U_n \leq V_n$.

1)Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} V_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ converge.

2)Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ diverge, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} V_n$ diverge.

Exercice 5
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{\ln n}{n^{5/2}}$ est convergente.

Exercice 6
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{\ln n}{n}$ est divergente.

Théorème 5 (critère de négligeabilité)
Soient $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} V_n$ deux séries telles que $U_n \underset{+\infty}{=} o(V_n)$.

1)Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} V_n$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ converge.

2)Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ diverge, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} V_n$ diverge.

<u>Exercice 7</u>

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}} = 0$. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}}$.

Théorème 6 (critère d'équivalence)

Soient $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ deux séries telles que $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$.

Alors, les séries $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ sont de même nature.

<u>Exercice 8</u>

Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{2n^2+3n+1}{n^3+4}$.

<u>Exercice 9</u>

Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+3n+1}{2^n}$.

<u>Exercice 10</u>

Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite définie par $U_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

1)Écrire le DL d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+X)$.

2)En déduire que $U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. Conclure sur la nature de la série $\sum_{n\geq 1} U_n$.