68 points · $\frac{50}{68} = \frac{20}{20} = 73\%$ du sujet

DS2 - ecg2 - maths appliquées
mercredi 8/11/2023

Exercice 1 24 points

Partie A 15 points

Dans cette partie, a, b et c sont des réels fixés. On suppose que $\mathbf{a \neq 0}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ où

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est A.

1)Justifier que A est diagonalisable. 1

2)a)Vérifier que les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ sont colinéaires à X. 1,5

b)En déduire une base de Imf, puis la dimension de Imf. 2 + 0,5

3)a)Déterminer la dimension de $Kerf$. 1

b)Calculer $f(be_1 - ae_2)$ et $f(ce_1 - ae_3)$. En déduire une base de $Kerf$. 1+1+2

4)a)Montrer que X est un vecteur propre de A. 2

b)Préciser toutes les valeurs propres de A. 3

Partie B 9 points

Dans cette partie, on s'intéresse à $F = \left\{ \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$.

On considère l'application σ de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ qui à toute matrice $M = (m_{ij})$ de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ associe le réel :

$$\sigma(M) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} m_{ij}.$$

5)Montrer que σ est linéaire. 2

6)a)Montrer que $\forall M \in F,\ \sigma(M) \geq 0$. 2

b)F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$? 2

7)Soit $G = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) \mid \sigma(M) = 0\}$.

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et calculer sa dimension. 3

Exercice 2 14 points

Soit f l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ qui à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe la matrice :

$$f(M) = \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. 2,5

2) Justifier soigneusement que la matrice A de f dans $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ 2

3) Vérifier que $A^4 = A^2$. En déduire les valeurs propres possibles de A. 1 + 1,5

4) Montrer que A possède exactement trois valeurs propres et déterminer une base des sous-espaces propres associés. 6

5) A est-elle diagonalisable ? 1

Exercice 3 18 points

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ e_0(t) = 1, e_1(t) = t, e_2(t) = t^2.$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t)\, dt$$

1) Montrer que φ est linéaire. 2

2) Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2. 1 + 1,5 + 1,5

3) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E. 2

4)Ecrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$ 1

5)Justifier que φ est un automorphisme de E. 1

6)A est-elle diagonalisable ? 2

7)a)Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 2

b)Donner u_0 et établir que $\quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$. 1

c)En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n. 3

Exercice 4 12 points

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \; f(x) = \ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

1)Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement cette limite. 2 + 0,5

2)Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement cette limite. 2 + 0,5

3)Montrer que f est strictement monotone sur $]0, +\infty[$. 2

4)Dresser le tableau de variations de f en faisant apparaître les limites de f en 0^+ et $+\infty$. 1

5)On rappelle que $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$.

Montrer que l'équation $f(x) = 1$ possède une unique solution, notée $\alpha > 0$ et que l'on a : 2

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}.$$ 2