DS7 - ecg2 - maths appliquées
lundi 25/3/2024

Problème

Partie A (matrice de Vandermonde)

$\mathbf{R}_2[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
Pour des réels a, b, c, on considère la matrice V, appelée *matrice de Vandermonde*, définie par :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

On considère également l'application f de $\mathbf{R}_2[X]$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$\forall P \in \mathbf{R}_2[X],\ f(P) = \big(P(a), P(b), P(c)\big).$$

1)Montrer que si a,b,c ne sont pas distincts 2 à 2, alors V n'est pas inversible.

2)Montrer que f est une application linéaire.

3)On note $\mathscr{B} = \big(e_0, e_1, e_2\big)$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ définie par :
$e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.
On note $\mathscr{C} = \big(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\big)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

a)Montrer que si a, b, c sont distincts 2 à 2, alors $Ker f = \{0\}$.

b)Justifier soigneusement que $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = V$.

c)A l'aide des questions précédentes, établir que V est inversible si et seulement si a, b, c sont distincts 2 à 2.

4)Dans cette question, on suppose les réels a, b, c distincts 2 à 2.

On considère les polynômes du second degré Q_0 ,Q_1, Q_2, appelés *polynômes de Lagrange* définis par :

$$Q_0(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)},\ \ Q_1(x) = \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)},\ \ Q_2(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

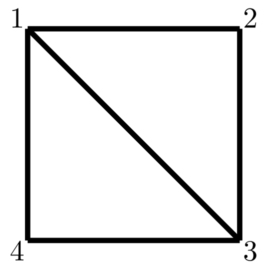
a)Montrer que $\forall i \in \{0,1,2\}$, $f(Q_i) = \epsilon_{i+1}$.

b)En écrivant alors la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$, établir :

$$V^{-1} = \frac{1}{(c-b)(b-a)(c-a)} \begin{pmatrix} bc(c-b) & ac(a-c) & ab(b-a) \\ b^2-c^2 & c^2-a^2 & a^2-b^2 \\ c-b & a-c & b-a \end{pmatrix}.$$

Partie B (matrice d'adjacence d'un graphe)

On considère le graphe non orienté G de sommets numérotés 1,2,3,4.



5)a)Déterminer la matrice d'adjacence A de G.

b)Justifier sans aucun calcul que A est diagonalisable.

c)i. Montrer soigneusement que A est de rang 3.

c)ii. En déduire que 0 est valeur propre de A et préciser la dimension du sous-espace propre de A associé à 0.

d)Montrer que -1 est valeur propre de A et déterminer une base de son sous–espace propre associé, ainsi que sa dimension.

e)En utilisant le théorème de réduction, expliquer sans calcul pourquoi A possède au moins 3 valeurs propres.

f)Montrer que A possède exactement 4 valeurs propres.

Indication : faire un raisonnement par l'absurde et utiliser que deux matrices semblables ont la même trace.

6)a)Vérifier que $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, puis calculer A^3 et A^4.

b)Montrer que $A^4 = 5A^2 + 4A$. En déduire un polynôme annulateur de A.

c)On note α et β, les valeurs propres de A non encore trouvées (autres que 0 et -1) et on suppose que $\alpha > \beta$.

c)i. Déterminer α et β, puis vérifier que $\dfrac{5}{2} < \alpha < 3$ et $-2 < \beta < -\dfrac{3}{2}$.

c)ii.Montrer les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = -4 \\ \alpha^2 = 4 + \alpha \\ \beta^2 = 4 + \beta \end{cases}$$

Partie C (étude d'une suite)

Pour tout entier $n \geq 1$, on note c_n le nombre de chaînes de longueur n du graphe G, défini dans la partie B.

7)a)Vérifier que $c_1 = 10$.

b)A l'aide de la question 6)a), calculer c_2, c_3 et c_4.

c)Par lecture du graphe, donner en listant les sommets, toutes les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 1 et 4.

8)A l'aide de la question 6)b), établir :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ c_{n+3} = 5c_{n+1} + 4c_n.$$

9)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} c_n \\ c_{n+1} \\ c_{n+2} \end{pmatrix}$ et on considère les matrices :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix},\ U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix},\ U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix}$$

où α et β sont les réels trouvés dans la question 6)c).

a)Préciser X_1, puis montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ X_{n+1} = BX_n$.

b)En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ X_n = B^{n-1}X_1$.

c)Montrer que U_1 est un vecteur propre de B.

d)Etablir que $BU_2 = \alpha U_2$ et $BU_3 = \beta U_3$. Que peut-on déduire ?

e)Justifier que B est diagonalisable.

f)Conclure que $B = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix}$.

g)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ B^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$.

h)Montrer que $P^{-1}X_1 = \dfrac{1}{2(\alpha - \beta)} \begin{pmatrix} 0 \\ 52 - 20\beta \\ 20\alpha - 52 \end{pmatrix}$.

Indication : utiliser les résultats de la partie A, puis la question 6)d) afin de mener au mieux les calculs.

i)A l'aide des questions précédentes, établir :

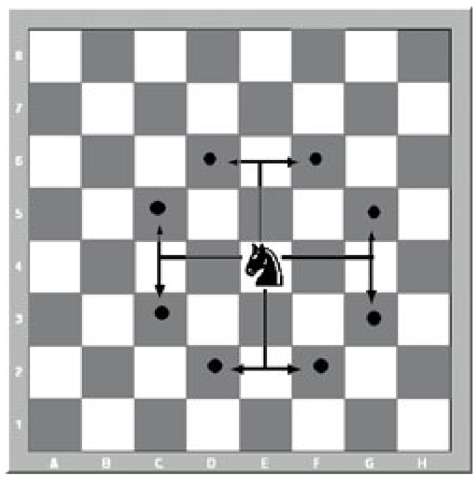
$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ c_n = \frac{(26 - 10\beta)\alpha^{n-1} + (10\alpha - 26)\beta^{n-1}}{\alpha - \beta}.$$

j)Montrer enfin qu'il existe une constante réelle $K > 0$ qu'on exprimera en fonction de α et β telle que

$$c_n \underset{+\infty}{\sim} K\alpha^n.$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.

Partie D (le problème du cavalier)



On étudie les déplacements d'un cavalier sur un échiquier de taille $n \times n$ (comportant n colonnes et n rangées) où $n \geq 3$.

On assimile chacune des n^2 cases de l'échiquier à un sommet.
Tout déplacement du cavalier, d'une case à l'autre, constitue une arête.
Ainsi, on a un graphe G, d'ordre n^2.

On dit qu'une chaîne de G est *hamiltonienne* si elle passe par tous les sommets de G en ne passant qu'une seule fois par chaque sommet.

Un *cycle* est une chaîne dont les arêtes sont distinctes et dont les deux extrémités sont identiques

Un *cycle hamiltonien* est un cycle qui passe par tous les sommets de G en ne passant qu'une seule fois par chaque sommet.

10)On suppose que $n = 3$.

a)Tracer le graphe G.

b)G est-il connexe ?

11)On suppose que $n = 4$.

On pourra si nécessaire, numéroter les rangées du bas vers le haut, de 1 à 4 et les colonnes de gauche à droite, de A à D, afin d'identifier les sommets et les chaînes (par exemple : .... B3 - A1 - C2 - E1 - ....).

a)Déterminer les degrés de chacun des 16 sommets.

b)En déduire le nombre d'arêtes de G.

c)i.Trouver une chaîne dont l'origine est le coin A1 et qui passe par tous les sommets de G.

ii. Que peut-on conclure pour G ?

d)Montrer que G ne possède aucune chaîne hamiltonienne.

Indication : raisonner par l'absurde avec les 4 coins de l'échiquier.

12)Informatique. Dans cette question, on suppose que $n = 5$.

On suppose les rangées et les colonnes de l'échiquier numérotées de 1 à 5.

La variable `sommet` est une liste de deux éléments, constituée des coordonnées d'un sommet de G.
Par exemple, le sommet se situant sur la 2ème rangée et la 3ème colonne est représenté par la liste [3,2].

La variable `S` est une liste constituée de sommets du graphe (ce peut être tous les sommets, mais pas nécessairement).

a)i. Compléter la fonction `voisins` ci-dessous afin qu'elle renvoie la liste des voisins du sommet pris en paramètre.

```
def voisins(sommet,S):
    mouvement=[[1,2],[1,-2],[-1,2],[-1,-2],[2,1],[2,-1],[-2,1],[-2,-1]]
    liste=[]
    for m in mouvement:
        a=sommet[0]+ .....
        b=sommet[1]+ .....
        if [a,b]in S:
            liste.append(.....)
    return liste
```

ii. Expliquer l'utilité du test.

b)On considère la fonction `mystere` ci-dessous :

```
def mystere(sommet,S):
    return len(voisins(sommet,S))
```

i. Que renvoie cette fonction ?

ii. On prend comme paramètre : S=[[i,j]for i in range(1,6)for j in range(1,6)].
Cette fonction renvoie quelque chose de particulier, quoi donc ?

iii. On prend comme paramètres : S=[[i,j]for i in range(2,5)for j in range(2,5)] et sommet=[3,2]. Quelle valeur la fonction renvoie t-elle ?

c)On considère la fonction `choix` ci-dessous :

```
def choix(sommet,S):
    M=8
    for v in voisins(sommet,S):
        if mystere(v,S)<M:
            w=v
            M=mystere(w,S)
    return w
```

On prend comme paramètre S=[[i,j]for i in range(1,6)for j in range(1,6)].

i. Expliquer l'algorithme. Que renvoie la fonction ?

ii. En quoi l'algorithme proposé est-il un algorithme glouton ?

d)On considère la fonction `bouledegomme`

```
def bouledegomme(sommet):
    S=[[i,j]for i in range(1,6)for j in range(1,6)]
    S=[s for s in S if s!=sommet]
    chemin=[sommet]
    for k in range(24):
        sommet=choix(sommet,S)
        chemin.append(sommet)
        S=[s for s in S if s!=sommet]
    return(chemin)
```

On tape sur la console la commande `bouledegomme([1,1])`.

Python renvoie la liste : [[1, 1], [2, 3], [1, 5], [3, 4], [5, 5], [4, 3], [5, 1], [3, 2], [4, 4], [5, 2], [3, 1], [1, 2], [2, 4], [4, 5], [5, 3], [4, 1], [2, 2], [1, 4], [3, 5], [5, 4], [4, 2], [2, 1], [3, 3], [2, 5], [1, 3]].

G possède t-il une chaîne hamiltonienne ?

e)G ne possède aucun cycle hamiltonien. Pourquoi ?

13)On suppose que $n = 8$.

En utilisant, la fonction `mystere`, compléter la fonction `arete` ci-dessous afin qu'elle renvoie le nombre d'arêtes de G.

```
def arete():
    S=[[i,j]for i in range(1,...)for j in range(1,...)]
    s=..........
    for sommet in S:
        s=.........
    return ....
```

Exercice

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.

2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

4. a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge.

b. En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto tf(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbf{E}(X) = 0$.

PARTIE II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1+e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbf{P}(Y \leqslant 0) = 0$.

8. Déterminer la fonction de répartition de Y.

9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. a. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}(U_n \leqslant x) = \left(1 + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

11. Soit U une variable aléatoire de fonction de répartition F_U, définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = e^{-e^{-x}}$.

a. Montrer que U est une variable aléatoire à densité et préciser une densité de U.

b. Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers U.