CONCOURS BLANC EML

EXERCICE 1

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I. Première partie

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier : $A^3 = A^2 + 2A$.
2. Montrer que la famille (A, A^2) est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un couple unique (a_n, b_n) de nombres réels tel que
$$A^n = a_n A + b_n A^2.$$
   b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.
   Préciser la valeur de a_1, a_2, b_1 et b_2.
4. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche a_n et b_n pour un entier n donné supérieur ou égal à 1.
5. a) Montrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n.$$
   b) En déduire a_n et b_n en fonction de n.
   c) Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n.

II. Seconde partie

Partie modifiée par rapport au sujet initial.

1. A l'aide de la partie **I**, déterminer un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer toutes les valeurs propres de A, et donner, pour chaque sous-espace propre de A, une base de ce sous-espace propre.
3. Déterminer une matrice diagonale D dont les termes diagonaux sont dans l'ordre réel croissant, et une matrice inversible P dont la troisième ligne est formée de termes tous égaux à 1, telles que
$$A = PDP^{-1}.$$
4. Calculer P^{-1}.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$. Etablir l'équivalence :
$$AM + MA = 0 \Longleftrightarrow DN + ND = 0.$$
6. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices N de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :
$$DN + ND = 0.$$
7. En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :
$$AM + MA = 0.$$

EXERCICE 2

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe C^2, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = x - \ln\left(1 + x^2\right)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \simeq 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. a) Calculer $f'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   b) En déduire le sens de variation de f.
   c) Calculer $f''(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
4. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$. On précisera la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.
5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\ f(x)\,dx$.
   À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

Partie Il : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
2. Établir que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.
3. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leq 10^{-3}$.
4. a) Établir : $\forall x \in [0,1]\,,\ f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.
   b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.
   c) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge.

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles associée à f

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y)\,.$$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les dérivées partielles premières de F en (x,y), à l'aide de f', x et y.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} f'(x) = f'(y) \\ f'(x+y) = f'(x) \end{cases}$. En déduire les points critiques de F.
3. Est-ce que F admet un minimum local ?

EXERCICE 3

Sujet légèrement modifié par rapport à l'original.

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout nombre réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Montrer que f est une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.

2. On définit la variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ par $Y = \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor X \rfloor$ désigne la partie entière de X.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $(Y = n)$ est donc égal à l'événement $(n \leq X < n+1)$.

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(Y = n) = \left(1 - \dfrac{1}{e}\right) e^{-n}$

   b) Montrer que $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   En déduire l'espérance et la variance de Y.

   c) On suppose importés les modules `numpy` d'alias `np` et `numpy.random` d'alias `rd`.
   On rappelle que la fonction `rd.random()` renvoie un réel aléatoire de [0,1].
   Compléter le programme Python ci-dessous pour qu'il simule la variable aléatoire Y.

```
u=rd.random()
y=.....
while u<..... :
    y=.....
    u=rd.random()
print("y vaut",y)
```

3. Soit U une variable de Bernoulli telle que $\mathrm{P}(U = 1) = P(U = 0) = \dfrac{1}{2}$.
   On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes.
   Soit la variable aléatoire $T = (2U - 1) Y$, produit des variables aléatoires $2U - 1$ et Y.
   Ainsi, T est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.

   a) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance $E(T)$ et calculer $E(T)$.

   b) Vérifier que $T^2 = Y^2$.
   En déduire que la variable aléatoire T admet une variance $V(T)$ et calculer $V(T)$.

   c) Pour tout nombre entier relatif n, calculer la probabilité $\mathrm{P}(T = n)$.

4. Soit la variable aléatoire $D = X - Y$. On note F_D la fonction de répartition de D.

   a) A l'aide de la formule des probabilités totales pour le système complet $(Y = n)_{n \in \mathbb{N}}$, établir pour tout t réel, l'égalité :

$$F_D(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\big((X \leq n + t) \cap (n \leq X < n+1)\big).$$

   b) Justifier : $\forall t \in \left]-\infty, 0\right[,\ F_D(t) = 0$ et $\forall t \in \left[1, +\infty\right[,\ F_D(t) = 1$.

   c) Pour tout nombre réel $t \in \left[0, 1\right[$ et pour tout nombre entier naturel n, calculer la probabilité $\mathrm{P}(n \leq X \leq n + t)$ en fonction de n et t.

   d) Montrer : $\forall t \in \left[0, 1\right[,\ F_D(t) = \dfrac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}}$.

   e) Montrer que D est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de D.