
Exercice 1 (eml 2019)

Partie A

1)a) Par définition, on a pour tout réel $t \geq 0$: $F_U(t) = P(U \leq t)$.

Donc $0 \leq F_U(t) \leq 1$.

En multipliant membre à membre par $f_V(t) \geq 0$, on déduit :

$\forall t \geq 0, 0 \leq F_U(t)f_V(t) \leq f_V(t)$.

1)b) $\int_0^{+\infty} f_V(t)dt$ converge car f_V est une densité.

D'après le critère de comparaison sur les intégrales de fonctions positives,

$\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)dt$ converge.

2) f_V est nulle sur $]-\infty, 0[$ donc $\int_{-\infty}^0 f_V(t)dt = 0$ et $\int_0^{+\infty} f_V(t)dt = 1$.

On déduit :

$P(U > V) = 1 - P(U \leq V)$

$$\begin{aligned} &= 1 - \int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} f_V(t)dt - \int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} (f_V(t) - F_U(t)f_V(t))dt \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t))f_V(t)dt. \end{aligned}$$

3)a) $\forall t \geq 0, F_U(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $f_V(t) = \mu e^{-\mu t}$.

3)b) De la question 2), on déduit :

$$\begin{aligned} P(U > V) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \mu \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} dt \\ &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_0^{+\infty} (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)t} dt \\ &= \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

En effet, $\int_0^{+\infty} (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)t} dt = 1$ puisque $t \mapsto (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)t}$ est une densité de la loi $\mathcal{E}(\lambda + \mu)$ sur \mathbf{R}_+ .

Partie B

4)a) Pour tout réel $t \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} P(M_n > t) &= P(T_1 > t \cap \dots \cap T_n > t) \\ &= P(T_1 > t) \cdots P(T_n > t) \text{ car } T_1, \dots, T_n \text{ sont indépendantes} \\ &= P(T_1 > t)^n \text{ car } T_1, \dots, T_n \text{ ont même loi} \\ &= (1 - F_{T_1}(t))^n \\ &= (e^{-\lambda t})^n \\ &= e^{-\lambda n t}. \end{aligned}$$

4)b) $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $T_i(\Omega) = \mathbf{R}_+$ donc $M_n(\Omega) = \mathbf{R}_+$.

On a donc $\forall t < 0$, $P(M_n \leq t) = 0$.

Par ailleurs, la question 4)a) donne $\forall t \geq 0$, $P(M_n \leq t) = 1 - e^{-n\lambda t}$.

$$\text{On conclut que } F_{M_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Donc $M_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.

5)a) Comme il n'y a pas d'entier entre 0 et 1, les événements $(N = 1)$ et $(T_1 \leq T_0)$ sont égaux.

$$\begin{aligned} \text{Donc } P(N = 1) &= P(T_1 \leq T_0) \\ &= 1 - P(T_1 > T_0) \\ &= 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \lambda} \text{ en utilisant 3)b) avec } U \rightarrow T_1 \text{ et } V \rightarrow T_0 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5)b) Pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned} \omega \in (N \leq n) &\iff N(\omega) \leq n \\ &\iff \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid T_k(\omega) \leq T_0(\omega) \\ &\iff \min(T_1(\omega), \dots, T_n(\omega)) \leq T_0(\omega) \\ &\iff M_n(\omega) \leq T_0(\omega) \\ &\iff \omega \in (M_n \leq T_0). \end{aligned}$$

Donc les événements $(N \leq n)$ et $(M_n \leq T_0)$ sont égaux.

Leurs contraires aussi donc $(N > n) = (M_n > T_0)$.

On déduit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(N > n) &= P(M_n > T_0) \\ &= \frac{\lambda}{n\lambda + \lambda} \text{ grâce à la question 3)b) avec } \mu \rightarrow \lambda \text{ et } \lambda \rightarrow n\lambda \\ &= \frac{1}{n + 1}. \end{aligned}$$

5)c) Pour tout entier $n \geq 2$, on a : $N > n - 1 \iff N = n$ ou $N > n$.

Cela entraîne que l'événement $(N > n - 1)$ est la réunion des événements (incompatibles) $(N = n)$ et $(N > n)$.

Donc $P(N > n - 1) = P(N = n) + P(N > n)$.

On déduit pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} P(N = n) &= P(N > n - 1) - P(N > n) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ grâce à 5)b)} \\ &= \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

5)d) $N(\Omega) = \mathbf{N}$ donc la famille $(N = k)_{k \in \mathbf{N}}$ est un système complet d'événements.

On a donc $\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k) = 1$. De cette égalité, on tire :

$$\begin{aligned} P(N = 0) &= 1 - P(N = 1) - \sum_{k=2}^{+\infty} P(N = k) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

6) Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$|nP(N = n)| = \left| n \times \frac{1}{n(n+1)} \right| = \frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

D'après le critère d'équivalence sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 2} |nP(N = n)|$ diverge.

Ainsi, N n'admet pas d'espérance.

Exercice 2 (eml 2019)

Partie A

1) A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Ainsi, $sp(A) = \{1, 1/2, 2\}$.

0 n'est pas valeur propre de A donc A est inversible.

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ possède 3 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

2) Cherchons les sous-espaces propres de A .

$$\text{Soit } U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$U \in E_1(A) \iff (A - I)U = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -y + z = 0 \\ -\frac{1}{2}y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, y = 0, z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$U \in E_{1/2}(A) \iff \left(A - \frac{1}{2}I \right) U = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2}x - y + z = 0 \\ \frac{3}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } E_{1/2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x = 2y, z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$U \in E_2(A) \iff (A - 2I)U = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -\frac{3}{2}y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x = z, y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

A est diagonalisable donc il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

D porte sur sa diagonale les valeurs propres de A .

Les colonnes de P sont constituées des bases des sous-espaces propres rangées dans le même ordre que D .

Comme les valeurs propres doivent être rangées dans l'ordre croissant, cela impose de prendre :

$$D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Enfin, } D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$3) \text{ On trouve : } Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ et } QDQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = D^{-1}.$$

4) On a les équivalences suivantes :

$$QDQ = D^{-1} \iff Q^{-1}QDQQ^{-1} = Q^{-1}D^{-1}Q^{-1} \iff D = Q^{-1}D^{-1}Q^{-1} \quad (1)$$

$$A = PDP^{-1} \iff A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} \iff D^{-1} = P^{-1}A^{-1}P \quad (2)$$

On déduit :

$$A = PDP^{-1}$$

$$= PQ^{-1}D^{-1}Q^{-1}P^{-1} \quad \text{grâce à (1)}$$

$$= PQ^{-1}P^{-1}A^{-1}PQ^{-1}P^{-1} \quad \text{grâce à (2)}$$

$$= PQP^{-1}A^{-1}PQ^{-1}P^{-1} \quad \text{car } Q^2 = I \iff Q^{-1} = Q$$

$$= (PQ^{-1}P^{-1})^{-1} A^{-1} (PQ^{-1}P^{-1}).$$

Posons $R = PQ^{-1}P^{-1}$. On a alors : $A = R^{-1}A^{-1}R$ donc A et A^{-1} sont semblables.

Partie B

5) Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbf{R}^3 .

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = e_1,$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (0, 0, 1) = e_3,$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (0, -1, 2) = -1e_2 + 2e_3.$$

$$\text{Donc } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'opération de Gauss $L_2 \leftrightarrow L_3$ transforme M en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, matrice

inversible car triangulaire sans zéro sur la diagonale.

Donc M est inversible.

6)a) Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$U \in E_1(M) \iff (M - I)U = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{cases} -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff y = -z$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } E_1(M) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, y = -z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -z \\ z \end{pmatrix}, (x, z) \in \mathbf{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (x, z) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } E_1(f) = \text{Vect}(u_1, -u_2) = \text{Vect}(u_1, u_2).$$

$E_1(f)$ est non vide donc 1 est bien valeur propre de f .

De plus, (u_1, u_2) est une famille génératrice de $E_1(f)$ et elle est libre car u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.

Ainsi, (u_1, u_2) est une base de $E_1(f)$.

6)b) Posons $u_3 = (x, y, z)$.

$$f(u_3) - u_3 = u_2 \iff (x, -z, y + 2z) - (x, y, z) = (0, 1, -1)$$

$$\iff (0, -z - y, y + z) = (0, 1, -1) \quad .$$

$$\iff y + z = -1$$

On peut prendre par exemple : $x = 0$, $y = -1$ et $z = 0$, ce qui donne $u_3 = (0, -1, 0)$.

6)c) Pour tous réels a , b et c , on a :

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 &\iff a(1, 0, 0) + b(0, 1, -1) + c(0, -1, 0) = (0, 0, 0) \\ &\iff (a, b - c, -b) = (0, 0, 0) \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est donc libre et de cardinal 3, c'est donc une base de \mathbf{R}^3 .

7)a) Comme u_1 et u_2 sont des vecteurs propres de f associés à 1, on a : $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$.

Par ailleurs, $f(u_3) = u_2 + u_3$ d'après la question 6)b).

$$\text{Donc } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, $f(-u_2) = -f(u_2) = -u_2$ et $f(u_3) = -(-u_2) + u_3$.

$$\text{Donc } M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7)b) M_1 et M_2 représentent la matrice d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

Elles sont donc semblables.

On trouve $M_1 M_2 = I$.

8) M et M_1 représentent la matrice de f dans deux bases différentes.

Elles sont donc semblables.

Il existe donc une matrice P inversible telle que $M = P^{-1} M_1 P$ (1)

On déduit : $M^{-1} = P^{-1} M_1^{-1} P = P^{-1} M_2 P$, d'où $M_2 = P M^{-1} P^{-1}$ (2)

Par ailleurs, comme M_1 et M_2 sont semblables, il existe une matrice Q inversible telle que $M_1 = Q^{-1} M_2 Q$ (3)

De (1) et (3), on déduit : $M = P^{-1} Q^{-1} M_2 Q P$.

Puis, en utilisant (2) : $M = P^{-1} Q^{-1} P M^{-1} P^{-1} Q P = (P^{-1} Q P)^{-1} M^{-1} (P^{-1} Q P)$.

Posons $R = P^{-1} Q P$. On a alors : $M = R^{-1} M^{-1} R$.

Donc M et M^{-1} sont semblables.

Partie C

9) T est triangulaire et ses éléments diagonaux sont non nuls.

Donc T est inversible.

Supposons que T soit diagonalisable. Alors, il existe une matrice diagonale D et une matrice P inversible telles que $T = PTP^{-1}$ (1)

T est triangulaire donc ses valeurs propres sont sur sa diagonale. Donc 1 est l'unique valeur propre de T .

D porte sur sa diagonale les valeurs propres de T donc $D = I$.

En remplaçant dans (1), on a : $T = PIP^{-1} = I$, ce qui est absurde.

Donc T n'est pas diagonalisable.

$$10)a) \text{ On a : } N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On déduit en développant :

$$(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I_3 - N^3 = I_3.$$

10)b) $N = T - I_3$ donc $I_3 + N = T$. La question 10)a) donne :

$$T(I_3 - N + N^2) = I.$$

Donc T est inversible et $T^{-1} = I_3 - N + N^2$.

11)a) N^2 est la matrice de gog dans la base canonique. Comme $N^2 \neq 0$, gog n'est pas l'endomorphisme nul.

Il existe donc un vecteur u de \mathbf{R}^3 tel que $gog(u) \neq 0$.

Puis, $N^3 = 0$ donc $gogog = 0$, ce qui entraîne que $gogog(u) = 0$.

11)b) Soient a, b et c des réels tels que $agog(u) + bg(u) + cu = 0$ (*)

En appliquant gog dans chaque membre et compte tenu de la linéarité de gog , on obtient :

$$ag^4(u) + bg^3(u) + cgog(u) = 0, \text{ c'est-à-dire : } cgog(u) = 0 \text{ puisque } g^3 \text{ et } g^4 \text{ sont les endomorphismes nuls.}$$

Comme $gog(u) \neq 0$, on a donc $c = 0$.

En reportant dans (*), on a : $agog(u) + bg(u) = 0$ (**)

En appliquant g dans chaque membre et compte tenu de la linéarité de g , on obtient :

$$ag^3(u) + bgog(u) = 0, \text{ c'est-à-dire } bgog(u) = 0, \text{ ce qui mène à } b = 0.$$

En reportant dans (**), on a : $agog(u) = 0$, ce qui donne $a = 0$.

Donc la famille $\mathcal{B}_3 = (gog(u), g(u), u)$ est libre. Elle est de cardinal 3 qui coïncide avec la dimension de \mathbf{R}^3 , c'est donc une base de \mathbf{R}^3 .

$$11)c) g(gog(u)) = g^3(u) = 0 = 0gog(u) + 0g(u) + 0u,$$

$$g(g(u)) = gog(u) = 1gog(u) + 0g(u) + 0u,$$

$$g(u) = 0gog(u) + 1g(u) + 0u.$$

Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_3}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11)d) $N^2 - N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que $N^2 - N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_3}(g)$.

Par ailleurs, N est la matrice de g dans la base canonique.

$N^2 - N$ et N sont donc les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes, elles sont donc semblables.

12)D'après la question 10)b), $T^{-1} = I_3 + N^2 - N$ (*)

Comme $N^2 - N$ et N sont semblables, il existe une matrice P inversible telle que $N^2 - N = P^{-1}NP$.

En remplaçant dans (*), on déduit :

$$T^{-1} = I_3 + P^{-1}NP = P^{-1}I_3P + P^{-1}NP = P^{-1}(I_3 + N)P = P^{-1}TP.$$

Donc T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 3 (eml 2019)

Partie A

1) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme et inverse de fonctions dérivables

et pour tout $t > 0$, on a : $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2} = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2}$.

$f'(t) \geq 0 \iff t - 1 \geq 0 \iff t \geq 1$.

Donc f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$		-	+
$f(t)$	$+\infty$	2	$+\infty$

$\lim_{t \rightarrow 0^+} t = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$. Par somme, $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = +\infty$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$. Par somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$.

2) f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[) = [2, +\infty[$.

3)a) g a les mêmes variations que $f|_{[1, +\infty[}$.

t	2	$+\infty$
$g(t)$	1	$+\infty$

3)b) Comme f' ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$, on peut déduire que g est dérivable sur $f([1, +\infty[) = [2, +\infty[$.

3)c) Soit $y \in [2, +\infty[$. Pour tout $t > 0$, on a :

$$f(t) = y \iff t + \frac{1}{t} = y \iff \frac{t^2 + 1}{t} = y \iff t^2 + 1 = ty \iff t^2 - ty + 1 = 0.$$

On obtient une équation du second degré d'inconnue t de paramètre y dont le discriminant vaut :

$$\Delta = (-y)^2 - 4 = y^2 - 4 \geq 0 \text{ car } y \geq 2.$$

$$\text{Les racines sont } t_1 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \text{ et } t_2 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

Comme $y \geq 2$, on a $t_1 \leq 1$ et $t_2 \geq 1$.

Or, $(f(t) = y \text{ et } t \geq 1) \iff t = g(y)$. Donc $g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$.

Partie B

4) Les fonctions $(x, y) \mapsto \frac{1}{x}$ et $(x, y) \mapsto \frac{1}{y}$ sont de classe C^1 sur U comme inverse d'une fonction polynomiale.

Par somme, $(x, y) \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ est de classe C^1 sur U .

La fonction $(x, y) \mapsto (1+x)(1+y)$ est de classe C^1 sur U car polynomiale.

Par somme, h est de classe C^1 sur U . Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 données par :

$$\begin{aligned}\partial_1 h(x, y) &= (1+y) \partial_1 \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (1+x) \right] \\ &= (1+y) \left[-\frac{1}{x^2} (1+x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \times 1 \right] \\ &= (1+y) \left[-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] \\ &= (1+y) \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} \right).\end{aligned}$$

Comme $\forall (x, y) \in U, h(x, y) = h(y, x)$, on a pour des raisons de symétrie :

$$\partial_2 h(x, y) = (1+x) \left(-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x} \right).$$

5) Soit $(x, y) \in U$. On a alors $x > 0$ et $y > 0$.

(x, y) est un point critique de h

$$\begin{aligned}\iff & \begin{cases} \partial_1 h(x, y) = 0 \\ \partial_2 h(x, y) = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} (1+y) \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} \right) = 0 \\ (1+x) \left(-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x} \right) = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} = 0 \text{ car } 1+y \neq 0 \\ -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x} = 0 \text{ car } 1+x \neq 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}\end{aligned}$$

6) Pour tout $(x, y) \in U$, on a :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = (x^2)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases}$$

Or, $x = x^4 \iff x - x^4 = 0 \iff x(1 - x^3) = 0 \iff 1 - x^3 = 0$
 $\iff x^3 = 1 \iff x = 1$ (car la fonction cube est bijective).

En reportant cette valeur de x dans le système, on obtient $y = 1$.

Ainsi, h admet sur U l'unique point critique $(1, 1)$.

7)a) Pour tout $(x, y) \in U$, on a :

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) (1+x)(1+y) \\ &= \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + \frac{x}{y}\right) (1+y) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{y}{x} + 1 + y + \frac{1}{y} + 1 + \frac{x}{y} + x \\ &= 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \\ &= 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

7)b) Pour tout $(x, y) \in U$, on a :

$$h(x, y) - h(1, 1) = h(x, y) - 8 = f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) - 6 \quad (*)$$

Or, d'après le tableau de variations de f , on a : $\forall t > 0, f(t) \geq 2$.

Comme pour tout $(x, y) \in U$, on a $x > 0, y > 0$ et $\frac{x}{y} > 0$, on peut déduire

que $f(x) \geq 2, f(y) \geq 2$ et $f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 2$.

De (*), on déduit alors que $h(x, y) - h(1, 1) \geq 2 + 2 + 2 - 6$, c'est-à-dire $h(x, y) - h(1, 1) \geq 0$, ce qui prouve que h admet en $(1, 1)$ un minimum global sur U .

Partie C

8) Montrons ce résultat par récurrence.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « u_n existe et $u_n \geq 1$ ».

u_1 existe et $u_1 = 1 \geq 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, u_n existe donc nu_n existe. De plus, $u_n \geq 1$ donc $nu_n \geq n > 0$. Donc $nu_n \in D_f$. C'est pourquoi $f(nu_n)$ existe et qu'ainsi u_{n+1} existe.

De plus, comme $u_n \geq 1 > 0$, on a $u_n + \frac{1}{n^2 u_n} \geq u_n \geq 1$ donc $u_{n+1} \geq 1$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 1$.

9) programme :

```
def suite(n):  
    u=1  
    for k in range(1,n):  
        u=u+1/(k**2*u)  
    return u
```

10)a) $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2 u_n} \geq 0$ car $u_n \geq 0$.

De plus, $u_n \geq 1$ donc $n^2 u_n \geq n^2$, puis $\frac{1}{n^2 u_n} \leq \frac{1}{n^2}$, d'où $v_n \leq \frac{1}{n^2}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$.

10)b) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge comme série de Riemann de paramètre $2 > 1$.

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.

10)c) Pour tout entier $n \geq 2$, on a par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_1 = u_n - 1.$$

On déduit $u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$.

Comme la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} v_k$ existe et est finie.

La suite (u_n) est donc convergente.

11)a) La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[k-1, k]$.

Donc $\forall t \in [k-1, k]$, $\varphi(k) \leq \varphi(t)$, c'est-à-dire : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

En intégrant entre les bornes croissantes $k-1$ et k , on obtient :

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{k^2} dt \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt, \text{ c'est-à-dire : } \frac{1}{k^2} (k - (k-1)) \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt.$$

Ainsi, $\forall k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$.

11)b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leq p < n$, on a par télescopage :

$$\sum_{k=p}^{n-1} v_k = \sum_{k=p}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_p.$$

Les questions 10)a) et 11)a) donnent par recollement des inégalités :

$$\forall k \geq 2, 0 \leq v_k \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt.$$

En sommant ces inégalités pour k allant de p à $n-1$, on a :

$$0 \leq \sum_{k=p}^{n-1} v_k \leq \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt, \text{ puis grâce à la relation de Chasles :}$$

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$

11)c) L'égalité ci-dessus donne pour $p=2$ et tout entier $n \geq 3$:

$$0 \leq u_n - u_2 \leq \int_1^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$

$$\text{Or, } \int_1^{n-1} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + 1 \leq 1.$$

Donc $0 \leq u_n - u_2 \leq 1$, puis $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$.

Par ailleurs, $u_2 = u_1 + \frac{1}{u_1} = 2$.

Donc pour tout entier $n \geq 2$, on a : $2 \leq u_n \leq 3$.

Par passage à la limite, on déduit : $2 \leq l \leq 3$.

11)d) En reprenant l'encadrement de la question 11)b), on obtient en calculant l'intégrale :

$$0 \leq u_n - u_p \leq \left[-\frac{1}{t} \right]_{p-1}^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + \frac{1}{p-1}.$$

$$\text{D'où } 0 \leq u_n - u_p \leq \frac{1}{p-1}.$$

Par passage à la limite, on déduit : $0 \leq l - u_p \leq \frac{1}{p-1}$.

11)e) programme :

```
def limite():
    u=2
    p=2
    while 1/(p-1)>10**-4:
        u=u+1/(p**2*u)
        p=p+1
    return u
```