
Correction DM14

Exercice (eml 2009)

Partie I :

1) L'expérience aléatoire est constituée d'épreuves successives, identiques et indépendantes (l'indépendance provenant de la remise).

T représente le rang d'obtention du premier succès (succès=noire) où la probabilité de succès à chaque épreuve vaut q . Donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$.

On a donc $T(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $\forall k \in \mathbf{N}^*, P(T = k) = p^{k-1}q$.

Enfin, le cours donne : $E(T) = \frac{1}{q}$ et $V(T) = \frac{p}{q^2}$.

2) On a déjà $U(\Omega) = \mathbf{N}$.

Puis, $\forall k \in \mathbf{N}^*, T = k \iff U = k - 1$, puisque $(T = k)$ est réalisé ssi les $k - 1$ premières boules sont blanches et la k -ième est noire. Donc $U = T - 1$.

Comme T admet une espérance et que U est une fonction affine de T , on conclut que U admet une espérance donnée par :

$$E(U) = E(T - 1) = E(T) - 1 = \frac{1}{q} - 1 = \frac{1 - q}{q} = \frac{p}{q}.$$

De même, U admet une variance donnée par :

$$V(U) = V(T - 1) = V(T) = \frac{p}{q^2}, \text{ grâce à la formule : } V(aT + b) = a^2 V(T).$$

Partie II :

1)a) On remarque déjà que $X(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$.

Pour tout $k \geq 2$, l'événement est $(X = k)$ est la réunion des événements incompatibles $B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k$ et $N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k$.

Donc pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) + P(N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) \\ &= P(B_1) \cdots P(B_{k-1})P(N_k) + P(N_1) \cdots P(N_{k-1})P(B_k) \text{ par indépendance} \\ &= p \times \dots \times p \times q + q \times \dots \times q \times p \\ &= qp^{k-1} + pq^{k-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) &= \sum_{k=2}^{+\infty} (qp^{k-1} + pq^{k-1}) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} qp^{k-1} + \sum_{k=2}^{+\infty} pq^{k-1} \\ &= qp \sum_{k=2}^{+\infty} p^{k-2} + pq \sum_{k=2}^{+\infty} q^{k-2} \\ &= qp \sum_{n=0}^{+\infty} p^n + pq \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \text{ en posant } n = k - 2 \\ &= qp \times \frac{1}{1 - p} + pq \times \frac{1}{1 - q} \\ &= 1 \text{ en utilisant que } p + q = 1. \end{aligned}$$

c) X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 2} kP(X = k)$ est absolument convergente, ce qui se ramène à montrer la convergence de la série $\sum_{k \geq 2} kP(X = k)$ puisque $\forall k \geq 2, kP(X = k) \geq 0$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n kP(X = k) &= \sum_{k=2}^n (kqp^{k-1} + kpq^{k-1}) \\ &= q \sum_{k=2}^n kp^{k-1} + p \sum_{k=2}^n kq^{k-1} \\ &= q \left(\sum_{k=1}^n kp^{k-1} - 1 \right) + p \left(\sum_{k=1}^n kq^{k-1} - 1 \right) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n kp^{k-1} &= \frac{1}{(1-p)^2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \text{ car ce sont des sommes} \end{aligned}$$

partielles de séries dérivée premières convergentes de paramètre p et q de $]0, 1[$.

Donc la série $\sum_{k \geq 2} kP(X = k)$ converge.

X admet donc une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=2}^{+\infty} kP(X = k) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n kP(X = k) \\ &= q \times \left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1 \right) + p \times \left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1 \right) \\ &= q \times \left(\frac{1}{q^2} - 1 \right) + p \times \left(\frac{1}{p^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{q} - q + \frac{1}{p} - p \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)a) \bullet P((X = 2) \cap (Y = 1)) &= P((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)) \\ &= P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) \text{ par incompatibilité} \\ &= P(B_1)P(N_2) + P(N_1)P(B_2) \text{ par indépendance} \\ &= pq + qp \\ &= 2pq. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall k \geq 3, P((X = k) \cap (Y = 1)) &= P(N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) \\ &= q \times \dots \times q \times p \\ &= pq^{k-1}. \end{aligned}$$

b) La formule des probabilités totales pour le sce $(X = k)_{k \geq 2}$ donne :

$$\begin{aligned}
 P(Y = 1) &= \sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k \cap Y = 1) \\
 &= P(X = 2 \cap Y = 1) + \sum_{k=3}^{+\infty} P(X = k \cap Y = 1) \\
 &= 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} pq^{k-1} \\
 &= 2pq + pq^2 \sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-3} \\
 &= 2pq + pq^2 \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \\
 &= 2pq + pq^2 \times \frac{1}{1-q} \\
 &= 2pq + q^2 \\
 &= q(1+p).
 \end{aligned}$$

c) On a déjà $Y(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $P(Y = 1) = q(1+p)$.

$$\begin{aligned}
 \text{De plus, } \forall k \geq 2, P(Y = k) &= P(B_1 \cap \dots \cap B_k \cap N_{k+1}) \\
 &= P(B_1) \dots P(B_k) P(N_{k+1}) \\
 &= p \times \dots \times p \times q \\
 &= p^k q.
 \end{aligned}$$

3) Y et Z jouant des rôles symétriques, on a :

$$Z(\Omega) = \mathbf{N}^*, P(Z = 1) = p(1+q) \text{ et } \forall k \geq 2, P(Z = k) = q^k p.$$

$$\text{Enfin, } E(Z) = \frac{1}{p}(1 - q + q^2).$$

4) Soit $\omega \in \Omega$.

Comme $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est un événement certain, on a : $Y(\omega) = 1$ ou $Z(\omega) = 1$.

– si $Y(\omega) = 1$, alors $(YZ \sim Y \sim Z + 1)(\omega) = Y(\omega)Z(\omega) - Y(\omega) - Z(\omega) + 1 = 0$,

– si $Z(\omega) = 1$, alors $(YZ \sim Y \sim Z + 1)(\omega) = Y(\omega)Z(\omega) - Y(\omega) - Z(\omega) + 1 = 0$.

Donc la variable aléatoire $YZ \sim Y \sim Z + 1$ est nulle, ce qui signifie que $YZ = X \sim 1$.

5) Comme X admet une espérance, $X - 1$ donc YZ admet une espérance.

De plus Y et Z admettent une espérance.

Donc le couple (Y, Z) admet une covariance donnée par la formule de Huygens :

$$\begin{aligned}
 cov(Y, Z) &= E(YZ) - E(Y)E(Z) \\
 &= E(X - 1) - E(Y)E(Z) \\
 &= E(X) - 1 - E(Y)E(Z).
 \end{aligned}$$