TD15 - compléments sur les variables aléatoires discrètes

Exercice 1 ★ ★ ☆☆
Soient $p \in \,]0,1[$ un réel et $q = 1 - p$.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par :
$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbf{N}$ et $\forall k \in \mathbf{N},\ P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$.

On note $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

1)a)Préciser $S(\Omega)$.

b)montrer que $\forall k \in S(\Omega),\ P(S = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i \cap Y = k - i)$.

c)Conclure que $\forall k \in \mathbf{N},\ P(S = k) = (k + 1)p^2q^k$.

2)a)Préciser $D(\Omega)$.

b)Montrer que $\forall k \in D(\Omega),\ P(D = k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P(X = i \cap Y = i - k)$.

c)Conclure que $\forall k \in D(\Omega),\ P(D = k) = \dfrac{pq^{|k|}}{1 + q}$.

3)Montrer que $cov(S, D) = 0$. Peut-on conclure que S et D sont indépendantes ?

Exercice 2 ★ ★ ☆☆
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathscr{B}(n, p)$.
On pose $S = X + Y$, $Z = 2n - S$ et $T = XYZ$. On pose aussi $q = 1 - p$.

1)a)Rappeler la loi de S. Que vaut $S(\Omega)$?

b)En déduire que Z suit une loi connue dont on précisera les paramètres.

2)a)Exprimer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$ en fonction de n et p.

2)b)Exprimer $V(X)$ et $V(Y)$, puis $E(X^2)$ et $E(Y^2)$ en fonction de n et p.

3)a)Vérifier que $T = 2nXY - X^2Y - XY^2$.

b)En déduire que $E(T) = 2n^2p^2(1 - p)(n - 1)$.

c)A t-on $E(XYZ) = E(X)E(Y)E(Z)$?

Exercice 3 ★ ★ ☆☆
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathscr{G}(p)$.
On pose $M = max(X, Y)$ et $N = min(X, Y)$.

1)Montrer que $\forall k \in \mathbf{N},\ P(X \leq k) = P(Y \leq k) = 1 - q^k$.

2)a)Montrer que $\forall k \in \mathbf{N},\ P(M \leq k) = \left(1 - q^k\right)^2$.

b)En déduire la loi de M.

3)a)Montrer que $\forall k \in \mathbf{N},\ P(N \leq k) = 1 - q^{2k}$.

b)En déduire la loi de N.

Exercice 4 ★ ☆ ☆☆
Soient X_1, ..., X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathscr{P}(i)$.

Déterminer la loi de $S = X_1 + ... + X_n$.

Exercice 5 ★ ★ ★☆

Une urne contient $2n$ boules (avec $n \geq 2$). Parmi ces boules, n d'entre elles portent le numéro 0, les autres sont numérotées de 1 à n.
On tire de l'urne une poignée de n boules.
Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note U_k la variable aléatoire définie par :

$$U_k = \begin{cases} 1 & \text{si la poignée contient la boule numérotée } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1)Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ U_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Préciser $E(U_k)$ et $V(U_k)$.

2)Soit (i, j) un couple d'entiers distincts de $[\![1, n]\!]$.

a)Montrer que $U_i U_j \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{n-1}{4n-2}\right)$.

b)En déduire la valeur de $cov(U_i, U_j)$. Les variables aléatoires U_i et U_j sont-elles indépendantes ?

3)Soit $S = U_1 + \cdots + U_n$.

a)Que représente S ?

b)Calculer $E(S)$.

c)Montrer que $V(S) = \frac{n^2}{8n-4}$.

4)Soit T la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules qui sont dans la poignée.
Exprimer T à l'aide des U_k, puis calculer $E(T)$ en fonction de n.

Exercice 6 ★ ★ ★☆

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant la loi géométrique de paramètre p.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1)Préciser $S_n(\Omega)$.

2)Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $k \in [\![n+1, +\infty[\![$, on a :

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{i=n}^{k-1} P\big((X_{n+1} = k - i) \cap (S_n = i)\big).$$

3)Montrer par récurrence que $\forall k \in [\![n, +\infty[\![,\ P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$.

Exercice 7 ★ ★ ★★

Soit $n \geq 2$ un entier et soient X_1, ..., X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.

On pose $I_n = min(X_1, ..., X_n)$ et $J_n = max(X_1, ..., X_n)$. On note aussi $q = 1 - p$.

1)Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(X_i > k) = q^k$.

2)a)Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, déterminer $P(I_n > k)$. En déduire que I_n suit une loi connue dont on précisera le paramètre.

b)Préciser $E(I_n)$ en fonction de n et q.

3)a)Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, déterminer $P(J_n \leq k)$. En déduire la loi de J_n.

b)Montrer que J_n admet une espérance et que $E(J_n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{(-1)^{i-1}}{1-q^i}$.

Indications / Réponses

Exercice 1
1)a)$S(\Omega) = \mathbf{N}$.
b)Appliquer la formule des probabilités totales pour le sce $(X = i)_{i\in\mathbf{N}}$, puis voir que de nombreux termes de la somme sont nuls.
c)Utiliser l'indépendance de X et Y.
2)a)$D(\Omega) = \mathbf{Z}$.
b)Appliquer la formule des probabilités totales pour le sce $(X = i)_{i\in\mathbf{N}}$, puis voir que certains termes de la somme sont nuls.
c)Distinguer deux cas : $k \geq 0$ et $k < 0$.
3)Pour voir que $cov(S, D) = 0$, on peut utiliser la bilinéarité de la covariance ou la formule de Huygens.
Non, S et D ne sont pas indépendantes.

Exercice 2
1)a)Le THM 4 donne : $S \hookrightarrow \mathscr{B}(2n, p)$. On a donc $S(\Omega) = [\![0, 2n]\!]$.
b)$Z(\Omega) = [\![0, 2n]\!]$.
Puis, $\forall k \in [\![0, 2n]\!],\ P(Z = k) = P(2n - S = k) = P(S = 2n - k) = \cdots$
On conclut que $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(2n, q)$.
2)a)$E(X) = E(Y) = np$ et $E(Z) = 2nq$.
b)$V(X) = V(Y) = np(1-p)$ et $E(X^2) = E(Y^2) = np(1-p) + n^2p^2$.
c)Non.

Exercice 3
1)$P(X \leq k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} P(X = i) = \sum_{i=1}^{k} q^{i-1}p = p\sum_{j=0}^{k-1} q^j = p \times \frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k$.
2)a)Utiliser P3.
b)Pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'événement $(M \leq k)$ est la réunion des événements incompatibles $(M \leq k-1)$ et $(M = k)$.
On a donc $P(M \leq k) = P(M \leq k-1) + P(M = k)$.
Donc $P(M = k) = P(M \leq k) - P(M \leq k-1) = \left(1 - q^k\right)^2 - \left(1 - q^{k-1}\right)^2$.
3)Même démarche qu'en 2).

Exercice 4
Le thm 5 donne : $S \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 5
1)$P(U_k = 1) = \dfrac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \cdots = \frac{1}{2}$. On déduit $E(U_k) = \frac{1}{2}$ et $V(U_k) = \frac{1}{4}$.
2)a)$P(U_iU_j = 1) = P(U_i = 1 \cap U_j = 1) = \dfrac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \cdots = \frac{n-1}{4n-2}$.
b)En appliquant la formule de Huygens, on trouve $cov(U_i, U_j) = -\frac{1}{8n-4}$.
$cov(U_i, U_j) \neq 0$ donc U_i et U_j ne sont pas indépendantes.
3)a)S représente le nombre de boules qui portent un numéro non nul.
b)$E(S) = E(U_1) + \cdots + E(U_n) = \frac{n}{2}$.
c)On applique la formule hors programme donnant la variance d'une somme de variables aléatoires quelconques.
4)$T = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kU_k$. Par linéarité, $E(T) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kE(U_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$.

Exercice 6

1)$S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![$.

2)Utiliser que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, puis appliquer la formule des probabilités totales pour le sce $(S_n = i)_{i\geq n}$.

3)Pour l'hérédité, utiliser 2) et l'égalité : $\binom{i-1}{n-1} = \binom{i}{n} - \binom{i-1}{n}$.

Exercice 7

1)$P(X_i > k) = \displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} P(X_i = j) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{j-1}p = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{n+k}p = pq^k \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$

$= pq^k \dfrac{1}{1-q} = q^k$.

2)a)On applique P4 :

$P(I_n > k) = P(X_1 > k \cap ... \cap X_n > k) = P(X_1 > k) \cdots P(X_n > k) = \left(q^k\right)^n$.

On déduit : $P(I_n = k) = P(I_n > k-1) - P(I_n > k) = \left(q^{k-1}\right)^n - \left(q^k\right)^n$

$= \left(q^n\right)^{k-1} - \left(q^n\right)^k = \left(q^n\right)^{k-1}\left(1 - q^n\right)$.

Donc $I_n \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1 - q^n\right)$.

b)$E(I_n) = \dfrac{1}{1-q^n}$.

3)a)On applique P4.

$P(J_n \leq k) = P(X_1 \leq k \cap ... \cap X_n \leq k) = P(X_1 \leq k) \cdots P(X_n \leq k) = \left(1 - q^k\right)^n$.

On déduit : $P(J_n = k) = P(J_n \leq k) - P(J_n \leq k-1) = \left(1 - q^k\right)^n - \left(1 - q^{k-1}\right)^n$.

b)Question très technique ! Utiliser la formule du binôme et la série dérivée première.