
Correction ESSEC II 2010

Partie I : généralités sur la loi exponentielle

1)a) $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$ donc $E(X) = \frac{1}{\mu}$ et $V(X) = \frac{1}{\mu^2}$.

1)b) • Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_\mu(x) dx$ converge absolument.

On a $\int_{-\infty}^0 |x^n f_\mu(x)| dx = \int_{-\infty}^0 0 dx$ qui converge.

Il reste à établir la convergence de $\int_0^{+\infty} |x^n f_\mu(x)| dx = \int_0^{+\infty} x^n \mu e^{-\mu x} dx$.

On a : $x^n \mu e^{-\mu x} = o(1/x^2)$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n+2} e^{-\mu x} = 0$ par croissances comparées.

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, on déduit par le critère de négligeabilité sur les

fonctions positives que $\int_1^{+\infty} x^n \mu e^{-\mu x} dx$ converge.

Enfin, $\int_0^1 x^n \mu e^{-\mu x} dx$ converge car la fonction $x \mapsto x^n \mu e^{-\mu x}$ est continue sur $[0, 1]$.

Par Chasles, $\int_0^{+\infty} x^n \mu e^{-\mu x} dx$ converge.

On conclut que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^n f_\mu(x)| dx$ converge. Donc X^n admet une espérance.

• Soit $A \geq 1$ un réel. Effectuons une IPP sur $\int_0^A x^{n+1} \mu e^{-\mu x} dx$.

On pose $u(x) = x^{n+1}$ $v'(x) = \mu e^{-\mu x}$
 $u'(x) = (n+1)x^n$ $v(x) = -e^{-\mu x}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[1, A]$. L'IPP est licite et donne :

$$\begin{aligned} \int_0^A x^{n+1} \mu e^{-\mu x} dx &= [-x^{n+1} e^{-\mu x}]_0^A - \int_0^A -(n+1)x^n e^{-\mu x} dx \\ &= -A^{n+1} e^{-\mu A} + \frac{n+1}{\mu} \int_0^A x^n \mu e^{-\mu x} dx (*). \end{aligned}$$

On a $\lim_{A \rightarrow +\infty} -A^{n+1} e^{-\mu A} = 0$ par croissances comparées.

En passant à la limite dans (*) quand $A \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1} \mu e^{-\mu x} dx = 0 + \frac{n+1}{\mu} \int_0^{+\infty} x^n \mu e^{-\mu x} dx.$$

C'est-à-dire : $E(X^{n+1}) = \frac{n+1}{\mu} E(X^n)$.

1)c) On a pour tout entier $k \geq 1$: $E(X^{k+1}) = \frac{k+1}{\mu} E(X^k)$.

En multipliant ces égalités pour k allant de 1 à $n-1$, on tire :

$$\prod_{k=1}^{n-1} E(X^{k+1}) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{\mu} E(X^k), \text{ soit :}$$

$$E(X^2) \dots E(X^{n-1}) E(X^n) = \frac{n!}{\mu^{n-1}} E(X) E(X^2) \dots E(X^{n-1})$$

Par télescopage, on déduit :

$$E(X^n) = \frac{n!}{\mu^{n-1}} E(X) = \frac{n!}{\mu^{n-1}} \frac{1}{\mu} = \frac{n!}{\mu^n}.$$

1)d) La formule de Koenig donne :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2!}{\mu^2} - \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \frac{1}{\mu^2}.$$

On retrouve la variance d'une loi exponentielle.

2)a) • Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x) = 1 - (1 - e^{-\mu x}) = e^{-\mu x} > 0.$$

• Pour tous réels $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} P_{(X>x)}(X > x+y) &= \frac{P(X > x \cap X > x+y)}{P(X > x)} \\ &= \frac{P(X > x+y)}{P(X > x)} \text{ car } y \geq 0 \\ &= \frac{1 - P(X \leq x+y)}{1 - P(X \leq x)} \\ &= \frac{1 - F_X(x+y)}{1 - F_X(x)} \\ &= \frac{1 - (1 - e^{-\mu(x+y)})}{1 - (1 - e^{-\mu x})} \\ &= e^{-\mu y} \\ &= 1 - F_X(y) \\ &= P(X > y). \end{aligned}$$

$$2)b)i) \text{ Pour tout } x \geq 0, \text{ on a } R(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt.$$

f est continue et strictement positive sur $[x, +\infty[$ donc $R(x) > 0$.

2)b)ii) F_X est dérivable sur $[0, +\infty[$ donc $R(x) = 1 - F_X(x)$ l'est aussi.

De plus, $R'(x) = -F'_X(x) = -f(x)$.

On sait par hypothèse que $P_{(X>x)}(X > x+y) = P(X > y)$.

Cela se traduit par : $\frac{P(X > x+y)}{P(X > x)} = P(X > y)$, c'est-à-dire :

$$R(x+y) = R(x)R(y) \quad (*)$$

En fixant x et en dérivant (*) par rapport à y , on obtient :

$$R'(x+y) = R(x)R'(y).$$

Puis, en prenant $y = 0$: $R'(x) = R(x)R'(0) = -f(0)R(x) = -\mu R(x)$.

On a donc pour tout $x \geq 0$, $R'(x) + \mu R(x) = 0$.

2)b)iii) R est solution de l'équation différentielle : $y' + \mu y = 0$.

Elle est de la forme $R : x \mapsto \beta e^{-\mu x}$.

Or, $R(0) = P(X > 0) = 1$ car X est positive. Cela entraîne que $\beta = 1$.

Donc $\forall x \geq 0$, $R(x) = e^{-\mu x}$.

On déduit que $\forall x \geq 0$, $F_X(x) = 1 - R(x) = 1 - e^{-\mu x}$.

Enfin, on a $\forall x < 0$, $F_X(x) = P(X \leq x) = 0$ car X est positive.

$$\text{Ainsi, } F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$.

3)a)• Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(\max(X_1, X_2) \leq x) \\ &= P((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)) \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \quad \text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\ &= F_{X_1}(x)F_{X_2}(x). \end{aligned}$$

$$\text{Or, } F_{X_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu_1 x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_{X_2}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu_2 x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Par produit, on déduit :

$$F_Y(x) = \begin{cases} (1 - e^{-\mu_1 x})(1 - e^{-\mu_2 x}) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

• F_Y est continue sur $[0, +\infty[$ comme produit, différence et composée de fonctions continues. F_Y est continue sur $] - \infty, 0[$ comme fonction nulle.

Donc F_Y est continue sur \mathbf{R} , sauf peut-être en 0.

De plus, F_Y est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ comme produit, différence et composée de fonctions continues. F_Y est de classe C^1 sur $] - \infty, 0[$ comme fonction nulle.

Y est donc une variable aléatoire à densité.

Une densité f_Y de Y s'obtient en dérivant F_Y aux points où elle est dérivable et en prenant une valeur arbitraire positive ou nulle ailleurs.

$$\forall x > 0, f_Y(x) = F'_Y(x) = \mu_1 e^{-\mu_1 x} (1 - e^{-\mu_2 x}) + (1 - e^{-\mu_1 x}) \mu_2 e^{-\mu_2 x}.$$

On peut prendre par exemple $f_Y(0) = 0$.

On a finalement :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \mu_1 e^{-\mu_1 x} (1 - e^{-\mu_2 x}) + (1 - e^{-\mu_1 x}) \mu_2 e^{-\mu_2 x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

3)b)• Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leq x) \\ &= 1 - P(Z > x) \\ &= 1 - P(\min(X_1, X_2) > x) \\ &= 1 - P((X_1 > x) \cap (X_2 > x)) \\ &= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) \quad \text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\ &= 1 - (1 - P(X_1 \leq x))(1 - P(X_2 \leq x)) \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x)). \end{aligned}$$

En réutilisant l'expression de $F_{X_1}(x)$ et $F_{X_2}(x)$, on déduit :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - (1 - (1 - e^{-\mu_1 x}))(1 - (1 - e^{-\mu_2 x})) & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - (1 - 0) \times (1 - 0) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Finalement, on obtient après regroupement des exponentielles :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1 + \mu_2)$.

Partie II : fiabilité

1) Soient $t \geq 0$ et $h > 0$.

$$\begin{aligned} P(t \leq T \leq t + h) &= F_T(t + h) - F_T(t) \\ &= (1 - R_T(t + h)) - (1 - R_T(t)) \\ &= R_T(t) - R_T(t + h) \end{aligned}$$

$$2) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(t \leq T \leq t + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F_T(t + h) - F_T(t)}{h} = F_T'(t) = f_T(t).$$

En effet, par hypothèse f_T est continue sur \mathbf{R}_+ donc en $t \geq 0$, ce qui assure la dérivabilité de F_T en t .

3)a) F_T est dérivable sur \mathbf{R}_+ par énoncé. Donc R_T l'est également.

$\forall t > 0$, $R_T'(t) = -F_T'(t) = -f_T(t) < 0$ par énoncé.

Donc R_T est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et même sur $[0, +\infty[$, étant continue en 0.

Par les propriétés d'une fonction de répartition, $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_T(t) = 1$.

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} R_T(t) = 0$.

On déduit : $\forall t \geq 0$, $R_T(t) > 0$.

3)b) On a vu dans la question 3)a) que R_T est dérivable sur \mathbf{R}_+ . Par inverse et composée de fonction dérivable, φ est dérivable sur \mathbf{R}_+ .

$$\forall t \geq 0, \varphi'(t) = \frac{\left(\frac{1}{R_T(t)}\right)'}{\frac{1}{R_T(t)}} = \frac{-\frac{R_T'(t)}{R_T(t)^2}}{\frac{1}{R_T(t)}} = -\frac{R_T'(t)}{R_T(t)} = \frac{f_T(t)}{R_T(t)} = \lambda(t).$$

3)c) Soit $t \geq 0$. En intégrant l'égalité précédente entre 0 et t , on a :

$$\int_0^t \varphi'(t) dt = \int_0^t \lambda(t) dt.$$

$$\text{Or, } \int_0^t \varphi'(t) dt = [\varphi(t)]_0^t = \varphi(t) - \varphi(0) = \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right) - \ln\left(\frac{1}{R_T(0)}\right)$$

avec $R_T(0) = P(T \geq 0) = 1$ car T est positive.

$$\text{On déduit : } \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right) = \int_0^t \lambda(t) dt, \text{ puis } -\ln(R_T(t)) = \int_0^t \lambda(t) dt.$$

En multipliant par -1 et en composant par l'exponentielle, on trouve :

$$R_T(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right).$$

4)a) v est dérivable sur \mathbf{R}_+ comme produit de fonctions dérivables.

$\forall t \geq 0$, $v'(t) = R_Z(t) + tR'_Z(t)$ avec $R'_Z(t) = -g(t)$ en reprenant l'argument du début de la question 3)a).

On déduit immédiatement :

$$\forall t \geq 0, tg(t) = R_Z(t) - v'(t).$$

4)b) Soit t un réel positif. g étant positive, on a pour tout $u \geq t$:

$$0 \leq tg(u) \leq ug(u) \quad (*)$$

$\int_t^{+\infty} tg(u)du$ converge car de même nature que $\int_t^{+\infty} g(u)du$.

Par hypothèse, Z admet une espérance et Z est positive.

Ceci entraîne que $\int_0^{+\infty} ug(u)du$ converge et vaut $E(Z)$.

$\int_t^{+\infty} ug(u)du$ est donc convergente.

En intégrant les inégalités (*) entre t et $+\infty$, on a :

$$0 \leq \int_t^{+\infty} tg(u)du \leq \int_t^{+\infty} ug(u)du$$

$$\text{avec } \int_t^{+\infty} tg(u)du = t \int_t^{+\infty} g(u)du = tP(Z > t) = tR_Z(t) = v(t).$$

$$\text{Ainsi, } \forall t \geq 0, 0 \leq v(t) \leq \int_t^{+\infty} ug(u)du \quad (**).$$

$$\text{Enfin, } \int_t^{+\infty} ug(u)du = \int_0^{+\infty} ug(u)du - \int_0^t ug(u)du = E(Z) - \int_0^t ug(u)du.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t ug(u)du = \int_0^{+\infty} ug(u)du = E(Z).$$

$$\text{Par différence, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} ug(u)du = 0.$$

La propriété des gendarmes dans (**) donne : $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$.

4)c) Soit $A \geq 0$. En intégrant l'égalité 4)a) entre 0 et A , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A tg(t)dt &= \int_0^A (R_Z(t) - v'(t))dt \\ &= \int_0^A R_Z(t)dt - \int_0^A v'(t)dt \\ &= \int_0^A R_Z(t)dt - [v(t)]_0^A \\ &= \int_0^A R_Z(t)dt - v(A) \quad \text{car } v(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_0^A R_Z(t)dt = v(A) + \int_0^A tg(t)dt.$$

$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A tg(t)dt = E(Z)$ et $\lim_{t \rightarrow A} v(A) = 0$ d'après 4)b).

Donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A R_Z(t)dt = E(Z)$.

$\int_0^{+\infty} R_Z(t)dt$ est donc convergente et vaut $E(Z)$.

5)a) Pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} R_{T_t}(x) &= P_{(T > t)}(T > t + x) \\ &= \frac{P((T > t) \cap (T > t + x))}{P(T > t)} \\ &= \frac{P(T > t + x)}{P(T > t)} \quad \text{car } (T > t + x) \subset (T > t) \text{ du fait que } x \geq 0 \\ &= \frac{R_T(t + x)}{R_T(t)}. \end{aligned}$$

5)b) En appliquant la question 4)c) avec $Z \rightarrow T_t$, on a :

$$\begin{aligned} E(T_t) &= \int_0^{+\infty} R_{T_t}(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{R_T(t + x)}{R_T(t)} dx \quad \text{d'après 5)a)} \\ &= \frac{1}{R_T(t)} \int_0^{+\infty} R_T(t + x)dx \\ &= \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u)du \quad \text{en posant } u = t + x \end{aligned}$$

Remarque

Pour légitimer ce calcul, il faudrait en principe s'assurer que T_t vérifie bien toutes les conditions de la question 4), c'est le cas :

- T_t admet une espérance (fonction affine de T et T admet une espérance)
- T_t est positive car on a pris comme hypothèse que $T > t$
- T_t est une variable aléatoire à densité. En effet, sa fonction de répartition F_{T_t} vérifie pour tout $x \in \mathbf{R}$: $F_{T_t}(x) = P(T_t \leq x) = P(T \leq t + x)$, c'est-à-dire :

$$F_{T_t}(x) = F_T(t + x).$$

T est à densité, F est continue sur \mathbf{R} et de classe C^1 sur \mathbf{R} sauf peut-être en 0. Par composée, F_{T_t} est continue sur \mathbf{R} et de classe C^1 sur \mathbf{R} sauf peut-être en $-t$.

- T_t a une densité continue sur \mathbf{R}_+ . En effet, F_T est dérivable sur $[0, +\infty[$.

Par composée, F_{T_t} est dérivable sur $[-t, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$.

Une densité f_{T_t} de T_t est donnée par : $\forall x \geq 0$, $f_{T_t}(x) = F'_{T_t}(x) = F'_T(t + x)$, c'est-à-dire :

$$f_{T_t}(x) = f_T(t + x).$$

f_T est continue sur $[0, +\infty[$.

Par composée, f_{T_t} est continue sur $[-t, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$.

6)a) $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$ donc pour tout réel $t \geq 0$: $F_T(t) = 1 - e^{-\mu t}$ et $f_T(t) = \mu e^{-\mu t}$.
On déduit pour tout réel $t \geq 0$:

$$R_T(t) = 1 - F_T(t) = e^{-\mu t} \quad \text{et} \quad \lambda(t) = \frac{f_T(t)}{R_T(t)} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu.$$

Remarque

Le taux de défaillance est constant.

6)b) Si le premier organe tombe en panne avant le deuxième, la durée de vie du système est $T = T_1 \leq T_2$.

Dans le cas contraire, la durée de vie du système est $T = T_2 \leq T_1$.

Ainsi, dans les deux cas, $T = \min(T_1, T_2)$.

$T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1)$ et $T_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_2)$. D'après la question I.3)b), $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1 + \mu_2)$.

La question II.6)a) donne alors pour tout réel $t \geq 0$:

$$R_T(t) = e^{-(\mu_1 + \mu_2)t} \quad \text{et} \quad \lambda(t) = \mu_1 + \mu_2.$$

6)c) Cette fois-ci, $T = \max(T_1, T_2)$ puisque c'est l'organe qui a la durée de vie la plus élevée qui détermine la durée de vie T du système.

On a toujours, par énoncé, $T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1)$ et $T_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_2)$.

D'après la question I.3)a), on a pour tout réel $t \geq 0$: $F_T(t) = (1 - e^{-\mu_1 t})(1 - e^{-\mu_2 t})$.

Donc pour tout réel $t \geq 0$:

$$R_T(t) = 1 - (1 - e^{-\mu_1 t})(1 - e^{-\mu_2 t}).$$

7)a) • $\varphi_{n,\beta}$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues, mais aussi continue sur $] -\infty, 0[$ comme fonction nulle. Donc $\varphi_{n,\beta}$ est continue sur \mathbf{R} sauf peut-être en 0.

• $\beta > 0$ et l'exponentielle prend des valeurs positives. Donc $\forall t \geq 0$, $\varphi_{n,\beta}(t) \geq 0$.

De plus, $\forall t < 0$, $\varphi_{n,\beta} = 0$. Finalement, $\forall t \in \mathbf{R}$, $\varphi_{n,\beta}(t) \geq 0$.

• $\int_{-\infty}^0 \varphi_{n,\beta}(t) dt$ converge et vaut 0 car $\varphi_{n,\beta}$ est nulle sur $] -\infty, 0[$.

On va ensuite établir par récurrence que $\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t) dt$ converge et vaut 1.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t) dt$ converge et vaut 1 ».

$\forall t \geq 0$, $\varphi_{1,\beta}(t) = \beta e^{-\beta t}$. C'est la densité sur $[0, +\infty[$ de la loi $\mathcal{E}(\beta)$, par ailleurs nulle sur $] -\infty, 0[$. Donc $\int_0^{+\infty} \varphi_{1,\beta}(t) dt$ converge et vaut 1, et $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Soit $A \geq 0$.

Effectuons une IPP sur $\int_0^A \varphi_{n+1,\beta}(t) dt = \int_0^A \frac{\beta}{n!} (\beta t)^n e^{-\beta t} dt$ en posant :

$$u(t) = \frac{(\beta t)^n}{n!} \quad v'(t) = \beta e^{-\beta t}$$

$$u'(t) = \frac{n\beta(\beta t)^{n-1}}{n!} \quad v(t) = -e^{-\beta t}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$. L'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned} \int_0^A \varphi_{n+1,\beta}(t)dt &= \left[-\frac{(\beta t)^n}{n!} \times e^{-\beta t} \right]_0^A - \int_0^A -\frac{n\beta(\beta t)^{n-1}}{n!} \times e^{-\beta t} dt \\ &= -\frac{(\beta A)^n}{n!} \times e^{-\beta A} + \int_0^A \frac{\beta}{(n-1)!} (\beta t)^{n-1} e^{-\beta t} dt \\ &= -\frac{(\beta A)^n}{n!} \times e^{-\beta A} + \int_0^A \varphi_{n,\beta}(t)dt \quad (*) \end{aligned}$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{(\beta A)^n}{n!} \times e^{-\beta A} = \lim_{B \rightarrow +\infty} -\frac{B^n}{n!} \times e^{-B} = 0 \text{ par croissance comparées.}$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \varphi_{n,\beta}(t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)dt = 1 \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

$$\text{En faisant tendre } A \text{ vers } +\infty \text{ dans } (*), \text{ on déduit : } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \varphi_{n+1,\beta}(t)dt = 1.$$

Donc $\int_0^{+\infty} \varphi_{n+1,\beta}(t)dt$ converge et vaut 1, ce qui montre $\mathcal{P}(n+1)$.

On conclut que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\int_0^{+\infty} \varphi_{n+1,\beta}(t)dt$ converge et vaut 1.

Par Chasles, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n+1,\beta}(t)dt$ converge et vaut 1.

Conclusion : $\varphi_{n,\beta}$ est une densité de probabilité.

7)b) En renommant les lettres $A \rightarrow t$, $t \rightarrow u$ et $n \rightarrow k$, l'intégration par parties faite plus haut donne pour tout réel $t \geq 0$ et tout entier $k \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi_{k+1,\beta}(u)du &= -\frac{(\beta t)^k}{k!} \times e^{-\beta t} + \int_0^t \varphi_{k,\beta}(u)du, \text{ c'est-à-dire :} \\ &\int_0^t \varphi_{k,\beta}(u)du - \int_0^t \varphi_{k+1,\beta}(u)du = \frac{(\beta t)^k}{k!} \times e^{-\beta t} \end{aligned}$$

En sommant ces égalités pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_0^t \varphi_{k,\beta}(u)du - \int_0^t \varphi_{k+1,\beta}(u)du \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} \times e^{-\beta t}$$

Par télescopage de la somme de droite, on obtient :

$$\int_0^t \varphi_{1,\beta}(u)du - \int_0^t \varphi_{n,\beta}(u)du = e^{-\beta t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} \quad (*)$$

$$\text{avec } \int_0^t \varphi_{1,\beta}(u)du = \int_0^t \beta e^{-\beta u} du = [-e^{-\beta u}]_0^t = 1 - e^{-\beta t}.$$

En reportant dans (*), on a :

$$1 - F_T(t) = 1 - \int_0^t \varphi_{n,\beta}(u)du = e^{-\beta t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} + e^{-\beta t}, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$R_T(t) = e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}.$$

8)a) • $\psi_{\beta,\eta}$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues, mais aussi continue sur $] -\infty, 0[$ comme fonction nulle. Donc $\psi_{\beta,\eta}$ est continue sur \mathbf{R} sauf peut-être en 0.

• $\beta > 0, \eta > 0$. L'exponentielle prend des valeurs positives. Donc $\forall t \geq 0, \psi_{\beta,\eta} \geq 0$. De plus, $\forall t < 0, \psi_{\beta,\eta}(t) = 0$. Finalement, $\forall t \in \mathbf{R}, \psi_{\beta,\eta}(t) \geq 0$.

• $\int_{-\infty}^0 \psi_{\beta,\eta}(t) dt$ converge et vaut 0 car $\psi_{\beta,\eta}$ est nulle sur $] -\infty, 0[$.

On remarque que sur $[0, +\infty[$, la dérivée de $e^{-(\frac{t}{\eta})^\beta}$ est $-\frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-(\frac{t}{\eta})^\beta}$.

Pour tout réel $A \geq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^A \psi_{\beta,\eta}(t) dt &= \int_0^A \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-(\frac{t}{\eta})^\beta} dt \\ &= \left[-e^{-(\frac{t}{\eta})^\beta} \right]_0^A \\ &= 1 - e^{-(\frac{A}{\eta})^\beta}. \end{aligned}$$

$\lim_{A \rightarrow +\infty} -\left(\frac{A}{\eta}\right)^\beta = -\infty$ car $\beta > 0$. D'où $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \psi_{\beta,\eta}(t) dt = 1$.

Donc $\int_0^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t) dt$ converge et vaut 1.

Par Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t) dt$ converge et vaut 1.

Conclusion : $\psi_{\beta,\eta}$ est une densité de probabilité.

8)b) En reprenant le calcul fait plus haut, on a pour tout réel $t \geq 0$:

$$R_T(t) = 1 - F_T(t) = 1 - \int_0^t \psi_{\beta,\eta}(t) dt = 1 - \left(1 - e^{-(\frac{t}{\eta})^\beta}\right) = e^{-(\frac{t}{\eta})^\beta}.$$

Puis, pour tout réel $t \geq 0$:

$$\lambda(t) = \frac{\psi_{\beta,\eta}(t)}{R_T(t)} = \frac{\frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-(\frac{t}{\eta})^\beta}}{e^{-(\frac{t}{\eta})^\beta}} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}.$$

8)c) Distinguons deux cas :

• $\beta = 1$

$\lambda(t) = \frac{1}{\eta}$. La fonction λ est constante et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = \frac{1}{\eta}$.

• $\beta > 1$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} = +\infty$ et $\frac{\beta}{\eta} > 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = +\infty$.

Partie III : système Poissonien

1)a) Soit $s \in [0, 1]$ et $u \geq 0$.

Pour que $G_u(s)$ existe, il faut que s^{N_u} admette une espérance.

D'après le théorème de transfert, cela se produit si et seulement si la série

$\sum_{k \geq 0} s^k P(N_u = k)$ est absolument convergente.

Or, $\forall k \in \mathbf{N}$, $|s^k P(N_u = k)| = s^k P(N_u = k) \leq P(N_u = k)$.

La série $\sum_{k \geq 0} P(N_u = k)$ converge (de somme 1). D'après le critère de comparaison

sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{k \geq 0} |s^k P(N_u = k)|$ converge.

Donc s^{N_u} admet une espérance, donnée par le théorème de transfert égale à :

$$G_u(s) = E(s^{N_u}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = k) s^k.$$

1)b) Soient $u \geq 0$ et $v \geq 0$. Soit $s \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} G_{u+v}(s) &= E(s^{N_{u+v}}) \\ &= E(s^{N_u + (N_{u+v} - N_u)}) \\ &= E(s^{N_u} s^{N_{u+v} - N_u}). \end{aligned}$$

(**P₂**) avec $t_0 \rightarrow u$ et $t_1 \rightarrow u + v$ justifie l'indépendance de N_u et $N_{u+v} - N_u$.

D'après le lemme des coalitions, toute fonction de N_u est indépendante de toute fonction de $N_{u+v} - N_u$. Donc s^{N_u} et $s^{N_{u+v} - N_u}$ sont indépendantes.

On a alors : $E(s^{N_u} s^{N_{u+v} - N_u}) = E(s^{N_u}) E(s^{N_{u+v} - N_u})$.

D'après (**P₃**) avec $s \rightarrow u$ et $t \rightarrow u + v$, les variables aléatoires $N_{u+v} - N_u$ et N_v ont même loi.

$s^{N_{u+v} - N_u}$ et s^{N_v} ont donc même loi et en conséquence même espérance.

On finit le calcul : $E(s^{N_u} s^{N_{u+v} - N_u}) = E(s^{N_u}) E(s^{N_v})$, c'est-à-dire :

$$G_{u+v}(s) = G_u(s) G_v(s).$$

Remarque

En écrivant $N_{u+v} = N_u + (N_{u+v} - N_u)$, en utilisant l'indépendance de N_u et $N_{u+v} - N_u$ et (**P₃**), on pouvait obtenir la loi de N_{u+v} :

$$P(N_{u+v} = k) = \sum_{i=0}^k P(N_u = i) P(N_v = k - i).$$

$$\text{D'où } G_{u+v}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_{u+v} = k) s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^k P(N_u = i) P(N_v = k - i) s^k$$

$$= \sum_{i=0}^k \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = i) P(N_v = k - i) s^k = \dots$$

Reste à justifier qu'on peut permuter les sommes !

$$2)a) G_1(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_1 = k) s^k = P(N_1 = 0) + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} P(N_1 = k) s^k}_{\geq 0} \geq P(N_1 = 0).$$

D'après (\mathbf{P}_1) , on a : $P(N_1 = 0) > 0$.

Donc $G_1(s) > 0$.

2)b) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a : $\psi(k) = G_k(s)$ et $e^{-k\theta(s)} = e^{k \ln G_1(s)} = G_1(s)^k$.
Il faut donc établir que $\forall k \in \mathbf{N}$, $G_k(s) = G_1(s)^k$. Une récurrence s'impose.

Soit $\mathcal{P}(k)$ la proposition : « $G_k(s) = G_1(s)^k$ ».

$\mathcal{P}(0)$ s'écrit : « $G_0(s) = 1$ ».

$$\begin{aligned} \text{Or, } G_0(s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_0 = k) s^k \\ &= P(N_0 = 0) s^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(N_0 = k) s^k \\ &= 1 \quad \text{car } N_0 \text{ est certaine et égale à } 0. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $k \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} G_{k+1}(s) &= G_k(s) G_1(s) \quad \text{d'après III.1)b) avec } u \rightarrow k \text{ et } v \rightarrow 1 \\ &= G_1(s)^k G_1(s) \quad \text{par HR} \\ &= G_1(s)^{k+1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k \in \mathbf{N}$, $G_k(s) = G_1(s)^k$.

Ainsi, $\forall k \in \mathbf{N}$, $\psi(k) = e^{-k\theta(s)}$.

2)c) Soit $q \in \mathbf{N}^*$.

Comme dans la question précédente, on montre par récurrence que

$$\forall k \in \mathbf{N}, G_{\frac{k}{q}}(s) = \left(G_{\frac{1}{q}}(s) \right)^k \quad (*)$$

Pour $k = q$, on a en particulier : $G_1(s) = \left(G_{\frac{1}{q}}(s) \right)^q$, puis $G_{\frac{1}{q}}(s) = (G_1(s))^{\frac{1}{q}}$.

On déduit :

$$\psi\left(\frac{1}{q}\right) = G_{\frac{1}{q}}(s) = (G_1(s))^{\frac{1}{q}} = (e^{-\theta(s)})^{\frac{1}{q}} = e^{-\frac{1}{q}\theta(s)}.$$

2)d) Soit $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$. Soit $r = \frac{p}{q}$.

$$\begin{aligned} \psi(r) &= G_{\frac{p}{q}}(s) \\ &= \left(G_{\frac{1}{q}}(s) \right)^p \quad \text{en appliquant } (*) \text{ avec } k \rightarrow p \\ &= \left(e^{-\frac{1}{q}\theta(s)} \right)^p \quad \text{voir calcul de la question III.2)c) \\ &= e^{-\frac{p}{q}\theta(s)} \\ &= e^{-r\theta(s)}. \end{aligned}$$

2)e) Soit $u \geq 0$. Posons $u_n = \frac{\lfloor 10^n u \rfloor}{10^n}$.

• u_n est un nombre rationnel, c'est-à-dire un quotient d'entiers. Il représente la troncature de u à n décimales près.

De l'inégalité classique $\forall x \in \mathbf{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, on déduit pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\lfloor 10^n u \rfloor \leq 10^n u < \lfloor 10^n u \rfloor + 1$$

$$10^n u - 1 < \lfloor 10^n u \rfloor \leq 10^n u$$

$$\frac{10^n u - 1}{10^n} < \frac{\lfloor 10^n u \rfloor}{10^n} \leq u$$

$$u - \frac{1}{10^n} < u_n \leq u.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u - \frac{1}{10^n} \right) = u. \text{ D'après la propriété des gendarmes, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u.$$

• L'inégalité ci-dessus donne : $u_n \leq u \leq u_n + \frac{1}{10^n}$.

$$\text{Posons } v_n = u_n + \frac{1}{10^n}.$$

L'énoncé précise que si $s \leq t$, alors $N_s \leq N_t$. Donc $N_{u_n} \leq N_u \leq N_{v_n}$

Comme $s \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto s^x$ est décroissante sur \mathbf{R} . On déduit :

$$s^{N_{v_n}} \leq s^{N_u} \leq s^{N_{u_n}}$$

Par croissance de l'espérance :

$$E(s^{N_{v_n}}) \leq E(s^{N_u}) \leq E(s^{N_{u_n}})$$

C'est-à-dire

$$G_{v_n}(s) \leq G_u(s) \leq G_{u_n}(s)$$

u_n et v_n étant des nombres rationnels, la question III.2)d) s'applique et donne :

$$e^{-v_n \theta(s)} \leq G_u(s) \leq e^{-u_n \theta(s)} \quad (*)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = u \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-v_n \theta(s)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-u_n \theta(s)} = e^{-u \theta(s)}.$$

Par passage à la limite dans (*) : $e^{-u \theta(s)} \leq G_u(s) \leq e^{-u \theta(s)}$.

$$\text{Ainsi, } \forall u \geq 0, G_u(s) = e^{-u \theta(s)}.$$

Remarque

Une question infaisable, sans l'indication que j'ai rajoutée.

2)f) Soit $s \in [0, 1]$.

Pour tout $h > 0$, la question III.2)e) donne : $\frac{G_h(s) - 1}{h} = \frac{e^{-h \theta(s)} - 1}{h}$.

$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et $\lim_{h \rightarrow 0^+} -h \theta(s) = 0$ donc $e^{-h \theta(s)} - 1 \underset{0}{\sim} -h \theta(s)$.

Donc $\frac{G_h(s) - 1}{h} \underset{0}{\sim} -\theta(s)$, ce qui signifie que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G_h(s) - 1}{h} = -\theta(s)$.

3) Soit $s \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1) - \underbrace{P(N_h = 0)(s^0 - 1)}_{=0} - P(N_h = 1)(s^1 - 1) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} (P(N_h = k)s^k - P(N_h = k)) - P(N_h = 1)(s - 1) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_h = k)s^k - \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_h = k) - P(N_h = 1)(s - 1) \\
 &= G_h(s) - 1 - P(N_h = 1)(s - 1).
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } G_h(s) - 1 = P(N_h = 1)(s - 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1).$$

4) Soit $s \in [0, 1]$.

$$\forall k \in \mathbf{N}, -1 \leq s^k - 1 \leq 0 \text{ donc } -P(N_h = k) \leq P(N_h = k)(s^k - 1) \leq 0.$$

On somme ces inégalités pour k allant de 2 à $+\infty$:

$$-\sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k) \leq \sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1) \leq 0.$$

$$\text{Comme } N_h \text{ prend ses valeurs dans } \mathbf{N}, \text{ on a : } \sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k) = P(N_h > 1).$$

Puis, en divisant membre à membre par h :

$$-\frac{P(N_h > 1)}{h} \leq \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1)}{h} \leq 0.$$

$$\text{D'après } (\mathbf{P}_4), \text{ on a : } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(N_h > 1)}{h} = 0.$$

$$\text{La propriété des gendarmes donne alors : } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1)}{h} = 0.$$

5)a) Soit $s \in [0, 1[$. Divisons membre à membre par h l'égalité trouvée en III.3) :

$$\frac{G_h(s) - 1}{h} = \frac{P(N_h = 1)}{h}(s - 1) + \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1)}{h}.$$

$$\text{D'après III.2)f), on a : } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G_h(s) - 1}{h} = -\theta(s).$$

$$\text{D'après III.4), on a : } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1)}{h} = 0.$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(N_h = 1)}{h} (s - 1) = -\theta(s)$, ce qui donne : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(N_h = 1)}{h} = \frac{\theta(s)}{1 - s}$.

Posons $\alpha = \frac{\theta(s)}{1 - s}$, ce qui est équivalent à $\theta(s) = \alpha(1 - s)$.

On a alors : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(N_h = 1)}{h} = \alpha = \text{constante}$, par unicité de la limite.

Comme $\forall h > 0$, $\frac{P(N_h - 1)}{h} > 0$, on a par passage à la limite : $\alpha \geq 0$.

5)b) Pour tout réel $s \in [0, 1[$, on vient de voir que $\alpha = \frac{\theta(s)}{1 - s}$.

En particulier, pour $s = 0$, on a :

$$\alpha = \theta(0) = -\ln G_1(0) = -\ln P(N_1 = 0).$$

Or, d'après (\mathbf{P}_1), on a : $0 < P(N_1 = 0) < 1$. Donc $\alpha > 0$.

5)c) Soit $u > 0$. Soit $s \in [0, 1]$.

D'après les questions III.2)e) et III.5)a), on a : $G_u(s) = e^{-u\alpha(1-s)}$.

$$\begin{aligned} \text{Puis, } G_u(s) &= e^{-\alpha u + \alpha u s} \\ &= e^{-\alpha u} e^{\alpha u s} \\ &= e^{-\alpha u} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha u s)^k}{k!} \quad \text{en utilisant la série exponentielle} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!} s^k. \end{aligned}$$

Quant à l'égalité $G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = k) s^k$, elle provient de III.1)a).

5)d) Soit $u > 0$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, posons $p_k = e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}$.

D'après la question précédente, on a pour tout réel $s \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = k) s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k s^k \quad (*)$$

Montrons par récurrence forte que $\forall k \in \mathbf{N}$, $P(N_u = k) = p_k$.

Soit $\mathcal{P}(k)$ la proposition : $\ll P(N_u = k) = p_k \gg$.

$\mathcal{P}(0)$ s'écrit : $\ll P(N_u = 0) = p_0 \gg$.

Elle est vraie, on l'obtient immédiatement en écrivant (*) pour $s = 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(n)$ vraies. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(N_u = k) = p_k$.

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^n P(N_u = k) s^k = \sum_{k=0}^n p_k s^k \quad (**)$$

En soustrayant membre à membre les égalités (*) et (**) et par la relation de Chasles, on obtient pour tout réel $s \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} P(N_u = k) s^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_k s^k$$

$$P(N_u = n+1) s^{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} P(N_u = k) s^k = p_{n+1} s^{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} p_k s^k$$

Puis, en posant $j = k - (n+2)$ dans chacune des sommes :

$$P(N_u = n+1) s^{n+1} + \sum_{j=0}^{+\infty} P(N_u = j+n+2) s^{j+n+2} = p_{n+1} s^{n+1} + \sum_{j=0}^{+\infty} p_{j+n+2} s^{j+n+2}$$

En sortant s^{n+2} des deux sommes, puis en divisant membre à membre par s^{n+1} , on obtient pour tout réel $s \in]0, 1[$:

$$P(N_u = n+1) + s \sum_{j=0}^{+\infty} P(N_u = j+n+2) s^j = p_{n+1} + s \sum_{j=0}^{+\infty} p_{j+n+2} s^j \quad (***)$$

Or, pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a :

$$0 \leq P(N_u = j+n+2) \leq 1 \text{ donc } 0 \leq P(N_u = j+n+2) s^j \leq s^j.$$

$$\text{On déduit : } 0 \leq \sum_{j=0}^{+\infty} P(N_u = j+n+2) s^j \leq \sum_{j=0}^{+\infty} s^j = \frac{1}{1-s}.$$

En multipliant membre à membre par s :

$$0 \leq s \sum_{j=0}^{+\infty} P(N_u = j+n+2) s^j \leq \frac{s}{1-s}.$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{1-s} = 0 \text{ donc } \lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{j=0}^{+\infty} P(N_u = j+n+2) s^j = 0 \quad (\text{gendarmes})$$

Comme p_n est la probabilité d'une loi de Poisson, on a par le même raisonnement :

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s \sum_{j=0}^{+\infty} p_{j+n+2} s^j = 0.$$

Un passage à la limite dans (***) quand $s \rightarrow 0^+$ donne : $P(N_u = n+1) = p_{n+1}$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}$, $P(N_u = n) = p_n = e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^n}{n!}$. Donc $N_u \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha u)$.

Remarque

Encore une question bien difficile.

C'est un résultat classique (hors programme) : on vient de montrer que si deux variables aléatoires X et Y ont la même fonction génératrice, alors elles ont même loi. La réciproque est évidente.

6)• L'événement $(T > t)$ est réalisé si et seulement si la première panne survient dans l'intervalle de temps $]t, +\infty[$, ce qui se produit si et seulement si il n'y a pas de panne dans l'intervalle de temps $[0, t]$, soit si et seulement si $(N_t = 0)$ est réalisé. Donc $(T > t) = (N_t = 0)$.

• D'après III.5d), $N_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha t)$. Donc $\forall k \in \mathbf{N}$, $P(N_t = k) = e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!}$.

Pour tout réel $t \geq 0$, on a :

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(N_t = 0) = 1 - e^{-\alpha t}.$$

Et pour tout réel $t < 0$, on a : $F_T(t) = P(T \leq t) = 0$ car T est positive.

$$\text{On conclut que } F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Donc $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$.

7)a) N_{t+h} est le nombre de pannes survenant dans l'intervalle $[0, t+h]$.

N_t est le nombre de pannes survenant dans l'intervalle $[0, t]$.

Donc $N_{t+h} - N_t$ est le nombre de pannes survenant dans l'intervalle $]t, t+h]$.

7)b) • L'essentiel est de montrer que la famille $(\tilde{N}_h)_{h \geq 0}$ vérifie les quatre propriétés du début de la partie III.

Remarquons tout d'abord que $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$ et N_h ont même loi grâce à (P_3) .

$$(\mathbf{Q}_1) \quad \tilde{N}_0 = N_t - N_t = 0.$$

Pour tout réel $h > 0$: $P(\tilde{N}_h = 0) = P(N_h = 0) \in]0, 1[$ grâce à (P_1) .

$$(\mathbf{Q}_2) \quad \text{Soient } t_0, t_1, \dots, t_n \text{ des réels tels que } 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n.$$

On a alors : $t \leq t + t_0 < t + t_1 < \dots < t + t_n$.

D'après (P_2) , les variables aléatoires $N_{t+t_0} - N_t, N_{t+t_1} - N_{t+t_0}, \dots, N_{t+t_n} - N_{t+t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes.

Donc $\tilde{N}_{t_0}, \tilde{N}_{t_1} - \tilde{N}_{t_0}, \dots, \tilde{N}_{t_n} - \tilde{N}_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes.

$$(\mathbf{Q}_3) \quad \text{Soient } h \text{ et } k \text{ des réels tels que } 0 < h < k.$$

$\tilde{N}_k - \tilde{N}_h = (N_{t+k} - N_t) - (N_{t+h} - N_t) = N_{t+k} - N_{t+h}$ a même loi que N_{k-h} grâce à (P_3) et donc la même loi que \tilde{N}_{k-h} .

$$(\mathbf{Q}_4) \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(\tilde{N}_h > 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(N_h > 1)}{h} \text{ car } N_h \text{ et } \tilde{N} \text{ ont même loi.}$$

Et cette limite vaut 0 grâce à (P_4) .

La famille $(\tilde{N}_h)_{h \geq 0}$ est donc bien un processus de Poisson.

• Il reste à établir que le paramètre est α .

$$\text{Or, d'après la question III.5)a), on a : } \alpha = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(N_h = 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(\tilde{N}_h = 1)}{h}$$

car N_h et \tilde{N} ont même loi.

• La famille $(\tilde{N}_h)_{h \geq 0}$ est donc un processus de Poisson de paramètre α .

Et on a donc en particulier : $\tilde{N}_h \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha h)$.

7)c) Notons \tilde{T} la variable aléatoire égale à la date de la première panne survenant après la date t .

Les événements $(\tilde{T} > u)$ et $(\tilde{N}_u = 0)$ sont égaux.

En effet, $(\tilde{T} > u)$ est réalisé si et seulement si il n'y a pas de panne dans l'intervalle de temps $[t, t+u]$, c'est-à-dire si et seulement si $(N_t = 0)$ est réalisé.

$\tilde{N}_u \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha u)$ donc $\tilde{T} \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ en reprenant le calcul de III.6).

7)d) Soit t un temps donné fixé.

La variable aléatoire \tilde{T} , égale à la date de la première panne survenant après la date t correspond, en terme de fiabilité, à la durée de vie du système après t .

Comme $\tilde{N}_h \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha h)$, on sait d'après la question II.6)a) que le taux de défaillance du système est constant et vaut α .