DS1 cubes
ecg2 maths appliquées

Exercice 1

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n\,(x+1)}$.

1. Vérifier que I_n est une intégrale convergente.
2. (a) déterminer deux réels a et b tels que pour tout x différent de -1 et de 0, on ait :
$$\frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$$
   (b) En déduire la valeur de I_1.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal 2, on a :
$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$$
   (b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n\,(x+1)^2}$.
   (a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.
   (b) Calculer J_0.
6. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.
   (b) Déterminer alors pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\,I_k$ en fonction de J_n.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{4(n-1)}$.Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
   En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1}\,I_n$ est convergente et donner sa somme.

Exercice 2

Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $MK = KM = M$.

1. (a) Montrer que E est un espace vectoriel.

   (b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de E.

   (a) Montrer que $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$, puis en déduire la forme des matrices de E.

   (b) Retrouver le fait que les matrices de E ne sont pas inversibles.

   (c) Déterminer une base de E et vérifier que $\dim E = 4$.

3. On considère l'ensemble F des mtrices de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des réels.

   (a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F.

   (b) Les matrices de F sont-elles diagonalisables ?

   (c) Dans cette question on appelle U la matrice de F telle que : $x = 3$, $y = 2$ et $z = 4$.
   Trouver les valeurs propres de U et exhiber un vecteur colonne propre pour chacune d'entre elles.

4. On note φ l'application de F dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice A de F associe le nombre $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{i,j}$,

   où $a_{i,j}$ désigne l'élément de la matrice A situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne.

   (a) Montrer que φ est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.

   (b) Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$. En déduire que $\operatorname{Ker}\varphi$ est de dimension 2.

   (c) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ une matrice de $\operatorname{Ker}\varphi$.

   Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de x, y et z et en déduire une base de $\operatorname{Ker}\varphi$.

EML 2005 voie Economique

Exercice 1

On considère les éléments suivants de $M_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K.
Pour toute matrice M de E, on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k, $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E.
2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2.
3. Soit la matrice $L = I + J$.

   a) Montrer, pour tout entier naturel n :

   $$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

   b) Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n :

   $$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

   c) Exprimer, pour tout entier relatif n, L^n à l'aide de I, L , L^2 et n.

   On considère

   la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

   de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e l'application identique de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

4. Montrer que f admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera.

   Est-ce que f est diagonalisable ?

5. a) Soit $w = (1, 0, 0)$. Calculer $v = (f - e)(w)$ et $u = (f - e)(v)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base (u, v, w).

   c) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout entier relatif n, exprimer f^n à l'aide de e, f, f^2 et n.