Exercice 1 (ecricome 2023)

1)$X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \dfrac{1}{n}$. Donc $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1, n]\!]\right)$.

Le cours donne : $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

2)Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Si on tire la boule numérotée k dans la première urne, alors la seconde urne contient des boules numérotées 1, 2, ..., k. Il est donc possible de tirer dans la seconde urne une boule numérotée k, auquel cas, Y prend la valeur k.
Ainsi, $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

3)Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

a)Supposons l'événement $(X = k)$ réalisé.
La seconde urne contient alors : 1 boule numérotée $\boxed{1}$, 2 boules numérotées $\boxed{2}$, ... k boules numérotées $\boxed{k}$.

Ce qui fait un total de $1 + 2 + \cdots k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ boules dans la seconde urne.

b)Supposons l'événement $(X = k)$ réalisé.

Comme on l'a vu, la seconde urne contient alors $\dfrac{k(k+1)}{2}$ boules dont les numéros représentés sont 1, 2, ..., k.

Distinguons deux cas :

• $j \geq k + 1$
j ne fait pas partie des numéros 1, 2, ..., k de la seconde urne. Il ne pourra donc pas être tiré. Ainsi, $P_{(X=k)}(Y = j) = 0$.

• $j \leq k$
Cette fois-ci, j fait partie des numéros 1, 2, ..., k de la seconde urne.
Il peut donc être tiré. Comme il y a j numéros qui portent le numéro j, on a donc :
$P_{(X=k)}(Y = j) = \dfrac{j}{\frac{k(k+1)}{2}} = \dfrac{2j}{k(k+1)}$.

4)a)On a l'égalité très classique : $\forall k \in \mathbf{N},\ \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

b)Soit $j \in [\![1, n]\!]$.
La formule des probabilités totales pour le sce $(X = k)_{1 \leq k \leq n}$ donne :

$$P(Y = j) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k \cap Y = j) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k) P_{(X=k)}(Y = j).$$

Or, d'après la question 3)b), on sait que $P_{(X=k)}(Y = j) = 0$ si $j \geq k + 1$, c'est-à-dire si $k \leq j - 1$, ce qui incite à couper la somme en deux.

$$\begin{aligned}
P(Y=j) &= \sum_{k=1}^{j-1} P(X=k)P_{(X=k)}(Y=j) + \sum_{k=j}^{n} P(X=k)P_{(X=k)}(Y=j)\\
&= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{n}\times 0 + \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{n}\times \frac{2j}{k(k+1)}\\
&= \frac{2j}{n}\times \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\\
&= \frac{2j}{n}\times \sum_{k=j}^{n} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \quad \text{d'après 4)a)}\\
&= \frac{2j}{n}\times \left(\frac{1}{j}-\frac{1}{n+1}\right) \quad \text{par télescopage}\\
&= \frac{2j}{n}\times \frac{n+1-j}{j(n+1)}\\
&= \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

5)Y est discrète finie donc admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{j=1}^{n} jP(Y=j)\\
&= \sum_{j=1}^{n} j\times \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}\\
&= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} j(n+1-j)\\
&= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} \left((n+1)j-j^2\right)\\
&= \frac{2}{n(n+1)}\left((n+1)\sum_{j=1}^{n} j-\sum_{j=1}^{n} j^2\right)\\
&= \frac{2}{n(n+1)}\left((n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \frac{2}{n(n+1)}\times n(n+1)\left(\frac{n+1}{2}-\frac{2n+1}{6}\right)\\
&= \frac{2}{n(n+1)}\times n(n+1)\times\frac{n+2}{6}\\
&= \frac{n+2}{3}.
\end{aligned}$$

6)En toute rigueur, on a besoin de distinguer deux cas :

• $n = 1$

Alors, $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1\}$. Les événements $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ sont certains, l'événement $\big((X = 1) \cap (Y = 1)\big)$ l'est également.
On a donc $P\big((X = 1) \cap (Y = 1)\big) = P(X = 1)P(Y = 1) = 1$.
Donc X et Y sont indépendantes.

• $n \geq 2$

On a par exemple $P\big((X = 1) \cap (Y = 2)\big) = 0$, alors que $P(X = 1) = \dfrac{1}{n}$ et $P(Y = 2) = \dfrac{2(n-1)}{n(n+1)}$.
Donc $P\big((X = 1) \cap (Y = 2)\big) \neq P(X = 1)P(Y = 2)$, ce qui prouve que X et Y ne sont pas indépendantes.

7)a)X et Y étant discrètes finies, XY l'est également. Elle admet donc une espérance donnée par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{(k,j)\in[\![1,n]\!]^2} kjP(X = k \cap Y = j) \\
&= \sum_{(k,j)\in[\![1,n]\!]^2} kjP(X = k)P_{(X=k)}(Y = j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} kjP(X = k)P_{(X=k)}(Y = j) \right)
\end{aligned}$$

On sait que si $j \geq k + 1$, alors $P_{(X=k)}(Y = j) = 0$, on peut donc se limiter dans la deuxième somme aux indices j tels que $j \leq k$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} kjP(X = k)P_{(X=k)}(Y = j) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} kj \times \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)} \right) \\
&= \frac{2}{n} \times \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k} j^2 \right) \\
&= \frac{2}{n} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
&= \frac{1}{3n} \times \sum_{k=1}^{n} \left(2k^2 + k\right) \\
&= \frac{1}{3n} \left(2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \right)
\end{aligned}$$

On déduit enfin :

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \frac{1}{3n}\left(2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{3n}\times\frac{2n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{6}\\
&= \frac{n(n+1)\left(2(2n+1)+3\right)}{18n}\\
&= \frac{(n+1)(4n+5)}{18}.
\end{aligned}$$

b)La formule de Huygens donne :

$$\begin{aligned}
cov(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y)\\
&= \frac{(n+1)(4n+5)}{18}-\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}\\
&= \frac{(n+1)(4n+5)-3(n+1)(n+2)}{18}\\
&= \frac{(4n^2+9n+5)-3(n^2+3n+2)}{18}\\
&= \frac{n^2-1}{18}.
\end{aligned}$$

8)a)programme :

```
def seconde_urne(k):
    L=[]
    for j in range(1,k+1):
        for i in range(j):
            L.append(j)
    return(L)
```

Explications :
On part d'une liste vide (ligne 2).
Pour tout entier j allant de 1 à k (ligne 3), on ajoute à la liste l'élément j (ligne 5) j fois (ligne 4).
Enfin, on retourne la liste ainsi construite (ligne 6).

b)programme :

```
import numpy.random as rd
def simul_XY(n):
    X=rd.randint(1,n+1)
    urne2=seconde_urne(X)
    nb=len(urne2)
    i=rd.randint(0,nb)
    Y=urne2[i]
    return X,Y
```

Explications :
On tire une boule dans la première urne. Le résultat est un nombre entier X compris entre 1 et n (ligne 3).
On construit la deuxième urne en appelant la fonction seconde_urne qui renvoie la liste urne2 $= [1, 2, 2, 3, 3, 3, \cdots, \underbrace{X, \cdots, X}_{X \text{ fois}}]$ (ligne 4).
On compte le nombre nb de boules de la seconde urne, c'est-à-dire le nombre d'éléments de la liste urne2 (ligne 5).
On tire une boule dans la seconde urne, ce qui revient à choisir un élément de urne2 et donc à choisir au hasard son indice $i \in [\![0, nb-1]\!]$ (ligne6).
Le terme d'indice i de la liste urne2, c'est-à-dire $urne2[i]$ représente le numéro de boule tiré donc Y.

c)programme

```
def fonction(n):
    liste=[0]*n
    for i in range(10000):
        j=simul_XY(n)[1]
        liste[j-1]=liste[j-1]+1/10000
    return liste
```

Explications :
On commence par construire une liste formée de n zéros (ligne 2).
On effectue 10000 fois l'expérience aléatoire formée des deux tirages, d'où la nécessité de faire une boucle avec i allant de 0 à 9999 (ligne 3).
Pour chacune des expériences aléatoires :
• on appelle à la ligne 4 la fonction simul_XY.
simul_$XY(n)$ est un couple dont les composantes respectives sont les valeurs prises par X et Y.
$j =$simul_$XY(n)[1]$ est la deuxième composante de ce couple, donc la valeur prise par Y, c'est un entier entre 1 et n.
• à la ligne 5, on augmente de 1/10000 la fréquence d'apparition de la valeur j, fréquence représentée par la variable $liste[j-1]$ (ligne 5).

En conclusion, la fonction renvoie une liste formée de n composantes, où pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ième composante, c'est-à-dire $liste[j-1]$ est la fréquence d'apparition du numéro j lors du deuxième tirage, en effectuant 10000 fois l'expérience aléatoire.

Remarque :
Du fait de la loin faible des grands nombres, la liste ainsi obtenue correspond grosso modo à la loi de Y.

Par exemple, fonction(4) renvoie la liste [0.403,0.304,0.199,0.094], très proche de la loi de Y, puisque $\forall j \in [\![1, 4]\!],\ P(Y = j) = \dfrac{5-j}{10}$.

9)a)Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, notons X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée dans la première urne, lors de la k-ième expérience aléatoire. Les variables aléatoires X_k sont deux à deux indépendantes. Elles suivent toutes la même loi, celle de X.
Elles ont donc même espérance $m = E(X)$ et même variance.

Pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, notons $\overline{X_r} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_r}{r}$.

D'après la loi faible des grands nombres, pour tout $\epsilon > 0$, on a :

$$\lim_{r \to +\infty} P\left(\left|\overline{X_r} - m\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Prenons ϵ petit. Cela signifie que si r est grand, la probabilité que $\overline{X_r}$ s'écarte de m de plus de ϵ est faible.

Pour $r = 50$, on peut donc estimer que $\overline{X_{50}} \approx m$, c'est-à-dire $\overline{X_{50}} \approx E(X)$.

Ici, $\overline{X_{50}}$ représente la valeur moyenne des valeurs prises par X_1, ..., X_{50}, c'est-à-dire l'abscisse $\overline{x}$ du point moyen du nuage.

Comme $n = 20$, on a donc $\overline{x} \approx E(X) = \dfrac{20+1}{2} = 10.5$.

Avec le même raisonnement, l'ordonnée du point moyen du nuage est :
$\overline{y} \approx E(Y) = \dfrac{20+2}{3} \approx 7.3$.

En conclusion, les coordonnées du point moyen du nuage sont $(10.5; 7.3)$.

b)Sur la figure 1, certaines valeurs de Y dépassent 20, ce qui n'est pas possible car $Y(\Omega) = [\![1, 20]\!]$.

Par ailleurs, la droite de regression linéaire doit passer par le point moyen, ce n'est pas le cas des figures 2 et 4.

C'est donc la figure 3 qui correspond au nuage de points étudié.

Exercice 2 (ecricome 2023)

1)a)$x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ par composée de fonctions dérivables.
$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.
Par quotient, f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\forall x>0,\ f'(x)=\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x}{2}}}{(\sqrt{x})^2}=\frac{e^{\frac{x}{2}}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{2x}=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2x}\times\frac{(\sqrt{x})^2-1}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2x}\times\frac{x-1}{\sqrt{x}}=\frac{x-1}{2x}\times\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

Donc $\forall x>0,\ f'(x)=\dfrac{x-1}{2x}f(x)$.

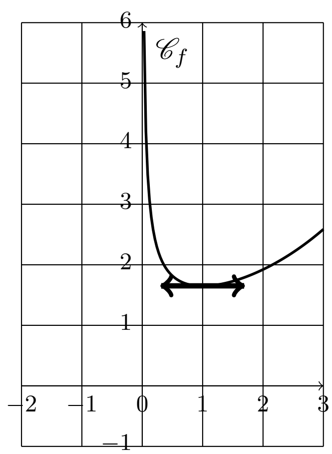
b)$\forall x>0,\ f(x)>0$ et $2x>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$e^{1/2}$	$\nearrow$	$+\infty$

- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{2}=0$ et $\lim\limits_{t\to0}e^t=1$, par composée, $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{x}{2}}=1$,
$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=+\infty$,
Par quotient, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{x^{1/2}}=+\infty$ par croissances comparées.

c)



d)Soit $n \geq 2$ un entier.

• f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]0,1[$. Elle réalise donc une bijection de $]0,1[$ sur $]e^{1/2},+\infty[$.
Comme $e < 4$, on a $e^{1/2} < 2$ donc $n \in]e^{1/2},+\infty[$.
n admet alors un unique antécédent u_n par f dans $]0,1[$.
Ainsi, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution u_n sur $]0,1[$.

• En appliquant de même le théorème de bijection sur $]1,+\infty[$ où f est continue et strictement croissante, on montre que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution v_n sur $]1,+\infty[$.

• On a enfin $f(1) = e^{1/2} \neq n$.

On conclut que l'équation $f(x) = n$ admet exactement deux solutions u_n et v_n avec $0 < u_n < 1$ et $v_n > 1$.

2)a)Par construction de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$, on a $\forall n \geq 2,\ f(v_n) = n$ et donc également $f(v_{n+1}) = n+1$.

Comme $n+1 \geq n$, on a donc $\forall n \geq 2,\ f(v_{n+1}) \geq f(v_n)$.

Comme f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et que v_n et v_{n+1} sont dans $[1,+\infty[$, on a donc $\forall n \geq 2,\ v_{n+1} \geq v_n$.

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

b)Comme $(v_n)_{n\geq 2}$ est croissante, elle admet une limite quand $n \to +\infty$.
Cette limite peut être un réel L ou valoir $+\infty$.
Supposons que cette limite vaut $L \in \mathbf{R}$.
Comme $\forall n \geq 2,\ v_n > 1$, on a $L \geq 1$ par passage à la limite.
Par continuité de f en L, on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = f(L)$.

Cependant, comme $f(v_n) = n$, on a aussi : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Ce qui mène à une contradiction.

On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

3)a)C'est le même raisonnement qu'en 2)a).
Par construction de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$, on a $\forall n \geq 2,\ f(u_n) = n$ et donc également $f(u_{n+1}) = n+1$.

Comme $n+1 \geq n$, on a donc $\forall n \geq 2,\ f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$.

Comme f est strictement décroissante sur $[0,1]$ et que u_n et u_{n+1} sont dans $[0,1]$, on a donc $\forall n \geq 2,\ u_{n+1} \leq u_n$.

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

b)$(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et minorée (par 0) donc convergente vers une certaine limite l, d'après le théorème de la limite monotone.

c)Comme $\forall n \geq 2,\ 0 < u_n < 1$, on a par passage à la limite : $0 \leq l \leq 1$.
Supposons que $l \in]0,1]$.

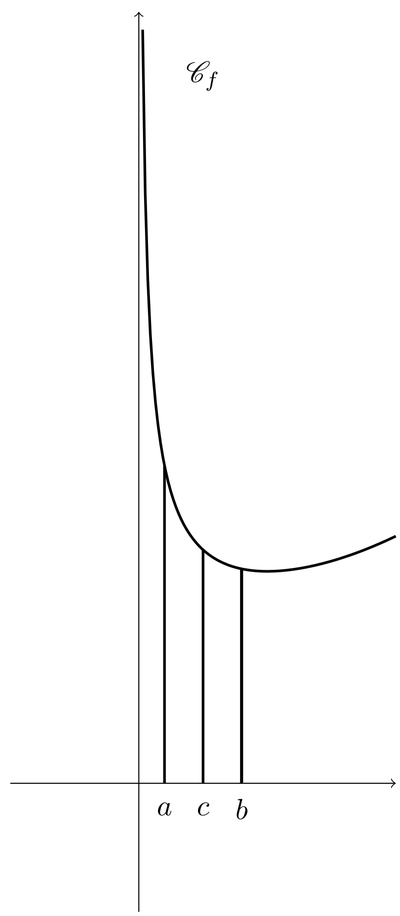
Par continuité de f en l, on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.
Cependant, comme $f(u_n) = n$, on a aussi : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
Ce qui mène à une contradiction. Donc $l = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

d)• Pour tout $n \geq 2$, on a : $f(u_n) = n \Longleftrightarrow \dfrac{e^{u_n/2}}{\sqrt{u_n}} = n \Longleftrightarrow \dfrac{e^{u_n}}{u_n} = n^2$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{u_n}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$, on a par composée : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{u_n} = 1$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1$.

• La limite ci-dessus peut s'écrire sous la forme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

4)a)



L'intervalle [a,b] qu'on construit à chaque étape doit toujours contenir u_n.
• si $f(c) < n = f(u_n)$, on a $c > u_n$ par décroissance de f.
u_n est à gauche de c, on rétrécit alors l'intervalle $[a, b]$ en prenant $b = c$.
• si $f(c) > n = f(u_n)$, on a $c < u_n$ par décroissance de f.
u_n est à droite de c, on rétrécit alors l'intervalle $[a, b]$ en prenant $a = c$.

On continue cette construction tant que l'écart entre a et b est supérieur à $eps = \epsilon$.

Au moment où cet écart est inférieur à $eps = \epsilon$, on sort de la boucle.
$\dfrac{a+b}{2}$ et u_n sont alors dans un intervalle $[a, b]$ dont la longueur est $b-a < \epsilon$.

On est donc sûr que $\dfrac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de u_n à ϵ prés.

```
import numpy as np
def approx_u(n,eps):
    a=0
    b=1
    while b-a>eps:
        c=(a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c)<n:
            b=c
        else:
            a=c
    return (a+b)/2
```

b)programme :

```
def sp(N,eps):
    s=0
    for n in range(2,N+1):
        s=s+approx_u(n,eps/(N-1))
    return s
```

Explications :
Pour tout $n \in [\![2, N]\!]$, notons a_n la valeur approchée de u_n à $\dfrac{\epsilon}{N-1}$ près donnée par approx_u(n,eps/(N-1)).
On a alors $\forall n \in [\![2, N]\!],\ a_n - \dfrac{\epsilon}{N-1} \leq u_n \leq a_n + \dfrac{\epsilon}{N-1}$.
En sommant ces inégalités pour $n \in [\![2, N]\!]$, on a :
$$\sum_{n=2}^{N} a_n - \epsilon \leq \sum_{n=2}^{N} u_n \leq \sum_{n=2}^{N} a_n + \epsilon.$$
Ceci prouve que $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} a_n$ est une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} u_n$ à ϵ près.

Exercice 3 (ecricome 2023)

Partie I

1)a)Pour tous réels a, b, c et d, on a :

$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0$

$\iff a(-1,1,0,1) + b(0,-1,1,0) + c(0,1,1,0) + d(1,0,0,1) = (0,0,0,0)$

$$\iff \begin{cases} -a+d &= 0 \\ a-b+c &= 0 \\ b+c &= 0 \\ a+d &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d &= a \\ a-b+c &= 0 \\ b+c &= 0 \\ 2a &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d &= 0 \\ -b+c &= 0 \\ b+c &= 0 \\ a &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d &= 0 \\ b &= c \\ 2c &= 0 \\ a &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \\ a &= 0 \end{cases}$$

Donc la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre.

C'est une famille libre de $\mathbf{R}^4$ dont le cardinal vaut 4 et coïncide avec la dimension de $\mathbf{R}^4$, c'est donc une base de $\mathbf{R}^4$.

b)Calculons $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ et $f(u_4)$.

Le vecteur colonne de $f(u_1)$ dans la base canonique $\mathscr{C}$ est :

$$AU_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } f(u_1) = 0.$$

Le vecteur colonne de $f(u_2)$ dans la base canonique $\mathscr{C}$ est :

$$AU_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } f(u_2) = 0.$$

Le vecteur colonne de $f(u_3)$ dans la base canonique $\mathscr{C}$ est :

$$AU_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2U_3 \text{ donc } f(u_3) = 2u_3.$$

Le vecteur colonne de $f(u_4)$ dans la base canonique $\mathscr{C}$ est :

$$AU_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = U_3 + 2U_4$$

donc $f(u_4) = u_3 + 2u_4$.

On déduit $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c)Notons P la matrice de passage de la base $\mathscr{C}$ à la base $\mathscr{B}$.
P est inversible.
Notons également $T = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$.
La formule de changement de base pour l'endomorphisme f donne :
$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = P^{-1}\mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f)P$, c'est-à-dire : $T = P^{-1}AP$ ou $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2)a)Le calcul donne : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Puis, $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Enfin, $4A^2 - 4A = 4\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A^3.$$

b)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition :
« il existe des réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A^2 + b_n A$ ».
$A^1 = 0A^2 + 1A$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie en posant $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= \left(a_n A^2 + b_n A\right) A \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= a_n A^3 + b_n A^2 \\ &= a_n \left(4A^2 - 4A\right) + b_n A^2 \quad \text{d'après 2)a)} \\ &= (4a_n + b_n)A^2 - 4a_n A. \end{aligned}$$

Posons $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.
On a alors $A^{n+1} = a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
Enfin, l'hérédité montre que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_{n+1} = 4a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = -4a_n.$$

3)a)L'égalité $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ donne en faisant $n \to n+1$:
$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n$.

b)D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$.
La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est donc linéaire d'ordre deux.
Son équation caractéristique associée est $r^2 - 4r + 4 = 0$, c'est-à-dire $(r-2)^2 = 0$ dont l'unique racine est 2.
D'après le cours, il existe des réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_n = (\lambda n + \mu)2^n \quad (*)$$

Il reste à déterminer λ et μ en se servant de la valeur de a_1 et a_2.
On sait que $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$ (voir 2)b)). On déduit : $a_2 = 4a_1 + b_1 = 1$.
En écrivant $(*)$ pour $n = 1$ et $n = 2$, on obtient le système :

$$\begin{cases} a_1 &= (\lambda + \mu)2^1 \\ a_2 &= (2\lambda + \mu)2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda + 2\mu &= 0 \\ 8\lambda + 4\mu &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda &= -\mu \\ -4\mu &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda &= 1/4 \\ \mu &= -1/4 \end{cases}$$

Donc $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_n = \left(\dfrac{1}{4}n - \dfrac{1}{4}\right)2^n = \dfrac{n-1}{4}2^n = (n-1)2^{n-2}$.

c)L'égalité $b_{n+1} = -4a_n$ donne en faisant $n \to n-1$:

$\forall n \geq 2,\ b_n = -4a_{n-1} = -4(n-2)2^{n-3} = -(n-2)2^{n-1}$.

Et on vérifie que l'égalité précédente marche encore pour $n = 1$.

On a donc $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ b_n = -(n-2)2^{n-1}$.

4)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$
\begin{aligned}
&A^n\\
&= a_n A^2 + b_n A\\
&= (n-1)2^{n-2}A^2 - (n-2)2^{n-1}A\\
&= (n-1)2^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (n-2)2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&= (n-1)2^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2(n-2)2^{n-2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&= 2^{n-2}\left((n-1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2(n-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\\
&= 2^{n-2}\left(\begin{pmatrix} 2n-2 & 0 & 0 & 2n-2 \\ 3n-3 & 2n-2 & 2n-2 & n-1 \\ 3n-3 & 2n-2 & 2n-2 & n-1 \\ 2n-2 & 0 & 0 & 2n-2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2n-4 & 0 & 0 & 2n-4 \\ 2n-4 & 2n-4 & 2n-4 & 0 \\ 2n-4 & 2n-4 & 2n-4 & 0 \\ 2n-4 & 0 & 0 & 2n-4 \end{pmatrix}\right)\\
&= 2^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Partie II

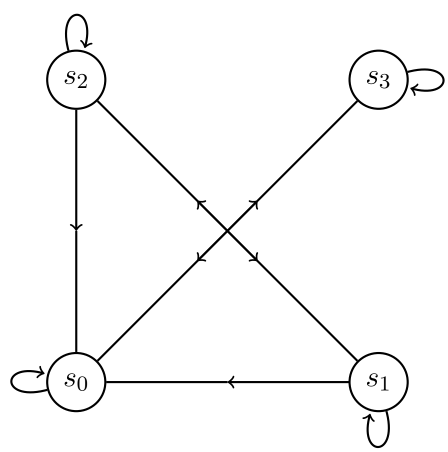
5)a)La matrice d'adjacence du graphe G est la matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbf{R})$ dont le coefficient M_{ij} de la ligne i et de la colonne j (avec $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq p$) est égal au nombre d'arcs[1] allant du sommet i vers le sommet j, c'est-à-dire du sommet s_{i-1} vers le sommet s_{j-1}.

b)D'après le cours, le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j de M^n est égal au nombre de chemins[2] de longueur n allant du sommet i vers le sommet j, c'est-à-dire du sommet s_{i-1} vers le sommet s_{j-1}.

6)a)Ici, $M = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En lisant la première ligne de A, on voit qu'il y a :
− 1 arc allant de s_0 à s_0 (c'est une boucle),
− 0 arc allant de s_0 à s_1,
− 0 arc allant de s_0 à s_2,
− 1 arc allant de s_0 à s_3.

Même raisonnement pour les autres lignes...d'où le diagramme :



b)Il n'y a pas de chemin de s_3 vers s_2. En effet, de s_3, on ne peut aller qu'en s_0. Une fois en s_0, on ne peut que rester en s_0 (ne pas oublier que G est orienté !).
Donc G n'est pas connexe.

c)Le nombre d'arcs de longueur n allant de s_3 à s_0 est le coefficient de la ligne 4 et de la colonne 1 de la matrice A^n. Il y en a donc 2^{n-1} d'après I.

1. arc=arête orientée
2. chemin=chaîne orientée

7)La définition de *sommet voisin* donnée par l'énoncé est en **contradiction** avec l'exemple proposé.
Dans la définition donnée, un sommet ne peut pas être le voisin de lui-même (à cause de $s \neq t$), alors que c'est autorisé dans l'exemple.
On va prendre comme définition que t est voisin de s si (s, t) est un arc du graphe, de sorte à être en cohérence avec l'exemple.

```
def matrice_vers_liste(A):
    p=len(A)
    L=[ ]
    for i in range(p):
        L.append([ ])
        for j in range(p):
            if A[i][j]!=0:
                L[i].append(j)
    return L
```

8)a)programme :

```
def parcours(L,i0):
    p=len(L)
    distances=[p]*p
    distances[i0]=0
    a_explorer=[i0]
    marques=[i0]
    while len(a_explorer)>0:
        s=a_explorer[0]
        del a_explorer[0]
        for v in L[s]:
            if v not in marques:
                marques.append(v)
                a_explorer.append(v)
                distances[v]=distances[s]+1
    return distances
```

b)**Remarque préliminaire :**
Soit G un graphe à p sommets s_0, s_1, ..., s_{p-1}.
Tout plus court chemin entre deux sommets s_i et s_j a nécessairement une longueur strictement inférieure à p.
On peut le voir en prenant un exemple : $p = 4$, $i = 0$, $j = 3$.
Supposons qu'on ait un plus court chemin de longueur 4 (ou plus éventuellement) entre s_0 et s_3.
Ce chemin est alors formé de 5 sommets, il y a donc au moins un sommet qui figure deux fois.
Par exemple : $s_0 \to \boxed{s_1} \to s_2 \to \boxed{s_1} \to s_3$.

Alors, $s_0 \to s_1 \to s_3$ est un chemin entre s_0 et s_3 de longueur 2, ce qui contredit le fait que $s_0 \to \boxed{s_1} \to s_2 \to \boxed{s_1} \to s_3$ est un plus court chemin.

Comme initialement, chaque élément de la liste *distances* vaut p, la condition ≪ if distances[j]<p ≫ garantit l'existence d'un chemin entre s_{i0} et s_j.

A la place de return distances, on met donc :

```
    sommets=[]
    for j in range(p):
        if distances[j]<p:
            sommets.append(j)
    return sommets
```