DM11 cubes - à rendre le lundi / /

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2.$$

1)Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$, calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.

2)Déterminer les points critiques de f (il y en a 3).

3)Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, préciser sa matrice hessienne en (x, y).

4)Déterminer les extrémas locaux de f. On précisera s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local et on donnera la valeur de f en ce point.

5)Vérifier que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} + y^2\right)x^2 + 2yx + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{4}$.

6)Montrer ensuite que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) \geq \frac{1}{2}$. Que peut-on conclure ?

Exercice 2 :

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}$ vérifie une *relation de Panjer* s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$P(X = 0) \neq 1$ et $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(X = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(X = k-1)$.

1)On suppose que $a = 0$ et que $b > 0$.

a)Montrer que $\forall k \in \mathbf{N},\ P(X = k) = \frac{b^k}{k!} P(X = 0)$. Que vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)$?

b)En déduire que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(b)$. Préciser son espérance et sa variance.

2)On suppose que $a < 0$ et que $b = -2a$.

a)Montrer que $\forall k \geq 2,\ P(X = k) = 0$.

b)En déduire que X suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

3)On suppose dans cette question que $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

a)Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(Z = k) = \frac{p(n-k+1)}{k(1-p)} P(Z = k-1)$.

b)En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes en fonction de n et p.

4)On revient au cas général.

a)Calculer $P(X = 1)$. En déduire que $a + b \geq 0$.

b)Montrer que $\forall m \in \mathbf{N},\ \sum_{k=1}^{m+1} kP(X = k) = a \sum_{k=0}^{m} (k+1)P(X = k) + b \sum_{k=0}^{m} P(X = k)$.

c)En déduire que pour tout entier $m \geq 1$:

$(1-a) \sum_{k=1}^{m} kP(X = k) = -(m+1)P(X = m+1) + (a+b) \sum_{k=0}^{m} P(X = k)$.

d)Conclure que la suite $\left(\sum_{k=1}^{m} kP(X = k)\right)_{m \geq 1}$ est majorée, puis que X admet une espérance qu'on calculera en fonction de a et b.