# EXERCICE 1

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

### Partie 1

**1)** Justifier que $f$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

**2) a)** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $f$.

**b)** Déterminer les points critiques de $f$.

**3) a)** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de $f$.

**b)** Vérifier que $f$ ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.

**4)** Cet extremum est-il global ?

### Partie 2

On note $g$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x,1).$$

**5)** Montrer que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue $x$, possède une unique solution que l'on notera $u_n$.

**6)** On note $h$ la restriction de $g$ à $[1,+\infty[$.

**a)** Dresser le tableau de variations de $h^{-1}$.

**b)** Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**c)** En déduire, en revenant à la définition de $u_n$, le réel $\alpha$ pour lequel on a : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^\alpha$.

# EXERCICE 2

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

**1) a)** Vérifier que la fonction $f$ qui à tout réel $x$ associe $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire $Y$.

**b)** On note $F$ la fonction de répartition de $Y$. Déterminer $F(x)$ selon que $x > 0$ ou $x \leqslant 0$.

**2) a)** Vérifier que la fonction $g$ qui à tout réel $x$ associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire $X$.

**b)** On note $G$ la fonction de répartition de $X$. Déterminer $G(x)$ selon que $x \geqslant 1$ ou $x < 1$.

**3)** On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que $X$. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que $M_n$ est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

**a)** On note $G_n$ la fonction de répartition de $M_n$. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction $G$ puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de $x$.

**b)** On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition $F_n$ de $Y_n$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}.$$

**4)** Déterminer, pour tout réel $x$ négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**5)** Soit $x$ un réel strictement positif.

**a)** Vérifier que, dès que $n$ est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

**b)** Donner un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque $u$ est au voisinage de $0$ , puis en déduire, pour tout réel $x$ strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**6)** Conclure que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de $Y$.

# EXERCICE 3

On considère un nombre réel $a$ élément de $]0,1[$ et l'endomorphisme $f_a$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$.

**1)** **a)** Donner les valeurs propres de $M_a$.

**b)** Déterminer les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

**c)** En déduire que $M_a$ n'est pas diagonalisable.

**2)** On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note $E$ l'espace vectoriel engendré par $I$, $M_a$ et $M_a^2$.

**a)** Quelle est la dimension de $E$ ?

**b)** On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $JK^2$ puis en déduire $(M_a - I)(M_a - aI)^2$.

**c)** En déduire que $M_a^3$ appartient à $E$.

**3)** **a)** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, il existe un unique triplet de réels $(u_n, v_n, w_n)$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I.$$

On donnera les valeurs de $u_0$, $v_0$ et $w_0$ et on écrira les relations liant $u_{n+1}$, $v_{n+1}$, $w_{n+1}$ à $u_n$, $v_n$ et $w_n$.

**b)** En utilisant les relations précédentes, expliquer pourquoi le programme Python ci-dessous ne permet pas de calculer et d'afficher les valeurs de $u_n, v_n$ et $w_n$ lorsque $n$ et $a$ sont entrés par l'utilisateur.
On pourra examiner attentivement la boucle « for ».

```
n=int(input("Entrez une valeur pour n "))
a=int(input("Entrez une valeur pour a "))
u=0
v=0
w=1
for k in range(1,n+1):
    u=(2*a+1)*u+v
    v=-a*(a+2)*u+w
    w=a*a*u
print(u,v,w)
```

**c)** Modifier la boucle de ce script en conséquence.

**4)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+3} = (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n$.

On **admet** que l'on peut en déduire $u_n$, pour tout entier naturel $n$, sous la forme :

$$u_n = \frac{(n-1)a^n - na^{n-1} + 1}{(a-1)^2}.$$

**5)** On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice $A$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ si chaque coefficient de $A_n$ tend vers le coefficient situé à la même place dans $A$.

Il en résulte (et on admet ce résultat) que $\lim\limits_{n\to+\infty} M_a^n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim\limits_{n\to+\infty} w_n\right) I$.

**a)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

**b)** En déduire la limite $L_a$, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, de la suite $(M_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**c)** Vérifier que $L_a^2 = L_a$.

**6)** On note $\varphi_a$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $L_a$.
Montrer que :

**a)** $\forall x \in \mathrm{Ker}(f_a - Id)$, $\varphi_a(x) = x$.

**b)** $\forall x \in \mathrm{Im}(f_a - Id)$, $\varphi_a(x) = 0$.

# PROBLEME

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité $p$,élément de $]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

## Partie 1 : un jeu naïf

Deux joueurs $A$ et $B$ s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :

Pour la première manche, $A$ et $B$ lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.

Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, on note $X_k$ (resp. $Y_k$) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1$^{\text{er}}$ pile par $A$ (resp. par $B$) lors de la $k$-ième manche.

On note, toujours pour $k$ dans $\mathbb{N}^*$, $E_k$ l'événement : « Il y a égalité à la fin de la $k$-ième manche ».
On note $E$ l'événement : « Il y a perpétuellement égalité ».
On note $G$ (resp. $H$ ) l'événement : « $A$ (resp. $B$ ) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $G_n$ (resp. $H_n$ ) l'événement : « $A$ (resp. $B$ ) gagne le jeu à la $n$-ième manche ».

**1)** étude de la première manche.

**a)** Donner la loi commune à $X_1$ et $Y_1$. En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.

**b)** Ecrire l'événement $E_1$ à l'aide des variables $X_1$ et $Y_1$.

**c)** Montrer que $P(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(Y_1 = i)$ et en déduire l'expression explicite de $P(E_1)$ en fonction de $p$ et $q$.

**d)** Justifier sans aucun calcul que les événements $G_1$ et $H_1$ sont équiprobables. En déduire la probabilité de $G_1$ en fonction de $q$.

**2)** Calcul de la probabilité de l'événement $G$.

**a)** Ecrire, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, l'événement $G_n$ à l'aide des événements $E_k$ et de l'événement $(X_n < Y_n)$.

**b)** Pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, calculer $P_{E_1 \cap \ldots E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geqslant 2, \ \ P(G_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}.$$

**c)** Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

**d)** Exprimer $G$ en fonction des $G_n$ puis conclure, après calcul, que : $P(G) = \dfrac{1}{2}$.

**e)** Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement $H$ : « $B$ gagne à ce jeu » et en déduire que ce jeu a presque sûrement une fin, c'est-à-dire que $P(E) = 0$.

## Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, $A$ parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et $B$ parie le contraire.

**3) a)** A l'aide du système complet d'événements $(X_1 = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, montrer que $P(Y_1 = X_1 + 1) = \dfrac{pq}{1+q}$.

**b)** En déduire la probabilité $u$ que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

**4) a)** Utiliser les événements $E_k$ pour écrire l'événement $K_n$ « l'un des deux joueurs gagne à la $n$-ième manche par un lancer d'écart », ceci pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$.

**b)** En déduire, pour tout entier naturel $n$ non nul, la valeur de $P(K_n)$.

**5)** Donner finalement la probabilité de l'événement $K$ : « $A$ gagne ce pari ».

## Partie 3 : informatique

On rappelle que la commande `rd.geometric(p)` permet à Python de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p$.

**6)** Compléter le script Python suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
import numpy.random as rd
p=float(input("Entrez une valeur pour p:"))
c=1
X=rd.geometric(p)
Y=rd.geometric(p)
while X==Y:
    X=............
    Y=...........
    c=...........
if X<Y:
    print("..........")
else:
    print("..........")
print(c)
```

**7)** Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée au script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur.

```
if ........................ :
    print("A gagne le deuxième jeu")
else:
    print("......................")
```