Révisions - séance 3

<u>Exercice</u>

C'est un exercice classique que vous pouvez rencontrer sur un sujet essec/hec (cf. essec III 2010, essec II 2001) ou sur un sujet basique.
On y définit le *moment d'ordre* n d'une variable aléatoire à densité en étudiant le cas particulier de la loi normale centrée réduite.

Dans tout l'exercice, $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$.

On note φ une densité de X. C'est donc la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, on dit que X admet un *moment d'ordre* n si X^n admet une espérance, c'est-à-dire[1] si $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|t^n \varphi(t)\right| \mathrm{d}t$ converge.

On appelle alors *moment d'ordre* n, le nombre réel, noté $\mathscr{M}_n(X)$, défini par :

$$\mathscr{M}_n(X) = E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \varphi(t) \mathrm{d}t.$$

1)Sans chercher à calculer l'intégrale, préciser la valeur de $\mathscr{M}_1(X)$ et $\mathscr{M}_2(X)$.

2)a)Montrer que $t^n \varphi(t) \underset{+\infty}{=} o(1/t^2)$. En déduire que $\int_0^{+\infty} \left|t^n \varphi(t)\right| \mathrm{d}t$ converge.

b)Etudier la parité de la fonction $t \mapsto \left|t^n \varphi(t)\right|$.

c)Conclure que X admet un moment d'ordre n.

d)Que vaut $\mathscr{M}_n(X)$ si n est impair ?

3)a)Vérifier que $\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi'(t) = -t\varphi(t)$.

3)b)A l'aide d'une IPP, montrer que $\int_0^{+\infty} t^{n+2} \varphi(t) \mathrm{d}t = (n+1) \int_0^{+\infty} t^n \varphi(t) \mathrm{d}t$.

3)c)Montrer de même que $\int_{-\infty}^{0} t^{n+2} \varphi(t) \mathrm{d}t = (n+1) \int_{-\infty}^{0} t^n \varphi(t) \mathrm{d}t$.

3)d)En déduire une relation entre $\mathscr{M}_{n+2}(X)$ et $\mathscr{M}_n(X)$.

3)e)Montrer que pour tout entier $k \geq 1$: $\mathscr{M}_{2k}(X) = \dfrac{(2k)!}{2^k k!}$.
Retrouver la valeur de $E(X^2)$. Que vaut $E(X^4)$?

1. d'après le théorème de transfert