Correction concours blanc EML

Exercice 1 (eml 2003)

Partie I

1)$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^3$.

2)A et A^2 ne sont pas colinéaires donc la famille (A, A^2) est libre.

3)a)• Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : ≪ Il existe un couple (a_n, b_n) de réels tels que $A^n = a_n A + b_n A^2$ ≫.

De façon évidente : $A^1 = 1A + 0A^2$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie avec $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= (a_n A + b_n A^2)A \quad \text{par HR} \\ &= a_n A^2 + b_n A^3 \\ &= a_n A^2 + b_n(A^2 + 2A) \quad \text{par la question 1)} \\ &= 2b_n A + (a_n + b_n)A^2. \end{aligned}$$

Posons $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.

On a alors : $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}A^2$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie quelquesoit $n \in \mathbf{N}^*$.

• Il reste à montrer l'unicité du couple (a_n, b_n).
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a alors : $A^n = a_n A + b_n A^2$.

Supposons qu'il existe un autre couple (c_n, d_n) de réels tels que $A^n = c_n A + d_n A^2$.

En soustrayant les 2 égalités précédentes membre à membre, on obtient :

$$0 = a_n A + b_n A^2 - c_n A - d_n A^2,$$

c'est-à-dire : $(a_n - c_n)A + (b_n - d_n)A^2 = 0$.

Comme la famille (A, A^2) est libre, on déduit : $a_n - c_n = 0$ et $b_n - d_n = 0$, ce qui donne $a_n = c_n$ et $b_n = d_n$.

L'unicité du couple est donc montrée.

b)D'après l'hérédité faite plus haut, on a $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.

D'après l'initialisation, $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

De plus, l'égalité $A^2 = 0A + 1A^2$ donne : $a_2 = 0$ et $b_2 = 1$.

4)Programme Python :

```
a=1
b=0
n=int(input("entrer n"))
for k in range(1,n):
    a,b=2*b,a+b
print(a)
print(b)
```

Remarque :
Ligne 5, on a utilisé une affectation parallèle.

5)a)En utilisant la première égalité 3)b) avec $n \to n+1$, puis la deuxième égalité, on obtient :

$a_{n+2} = 2b_{n+1} = 2(a_n + b_n) = 2a_n + 2b_n = 2a_n + a_{n+1}$.

Ainsi, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$.

b)La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est linéaire d'ordre deux.
Son équation caractéristique est : $x^2 - x - 2 = 0$, de racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.

D'après le cours, il existe des constantes réelles α et β telles que

$$\forall n \geq 1,\ a_n = \alpha \times (-1)^n + \beta \times 2^n.$$

En écrivant l'égalité pour $n = 1$ et $n = 2$, on obtient le système :
$\left\{\begin{array}{c} a_1 = -\alpha + 2\beta \\ a_2 = \alpha + 4\beta \end{array}\right.$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{c} -\alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha + 4\beta = 0 \end{array}\right.$, soit $\left\{\begin{array}{c} \alpha = -2/3 \\ \beta = 1/6 \end{array}\right.$

Donc $\forall n \geq 1,\ a_n = -\dfrac{2}{3} \times (-1)^n + \dfrac{1}{6} \times 2^n$.

On déduit : $b_n = \dfrac{1}{2}a_{n+1} = -\dfrac{1}{3} \times (-1)^{n+1} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6} \times 2^{n+1}$.

C'est-à-dire : $\forall n \geq 1,\ b_n = \dfrac{1}{3} \times (-1)^n + \dfrac{1}{6} \times 2^n$.

c)En reportant dans l'égalité 3)a), on conclut :

$$\forall n \geq 1,\ A^n = \left(-\frac{2}{3} \times (-1)^n + \frac{1}{6} \times 2^n\right) A + \left(\frac{1}{3} \times (-1)^n + \frac{1}{6} \times 2^n\right) A^2.$$

Partie II

1)D'après I.1, on a : $A^3 - A^2 - 2A = 0$. Posons $P(X) = X^3 - X^2 - 2X$.
$P(A) = 0$ donc P est un polynôme annulateur de A.

2)Les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines de P.

Or, $P(x) = 0 \iff x^3 - x^2 - 2x = 0 \iff x(x^2 - x - 2) = 0 \iff x = 0, -1,$ ou 2.

Ainsi, $sp(A) \subset \{0, -1, 2\}$.

Il reste à confirmer que 0, -1 et 2 sont bien des valeurs propres de A.

• $E_0(A)=\{U\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid AU=0\}$. Posons $U=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

$AU=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y+z=0\\ x=0\\ x=0\end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} y=-z\\ x=0\end{array}\right.$

Donc $E_0(A)=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mid y=-z \text{ et } x=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 0\\ -z\\ z\end{pmatrix}, z\in\mathbf{R}\right\}$.

Ainsi, $E_0(A)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\right)$.

• $E_{-1}(A)=\{U\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A+I)U=0\}$. Posons $U=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

$(A+I)U=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x+y+z=0\\ x+y=0\\ x+z=0\end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} y=z\\ x=-z\end{array}\right.$

Donc $E_{-1}(A)=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mid y=z \text{ et } x=-z\right\}=\left\{\begin{pmatrix} -z\\ z\\ z\end{pmatrix}, z\in\mathbf{R}\right\}$.

Ainsi, $E_{-1}(A)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right)$.

• $E_2(A)=\{U\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A-2I)U=0\}$. Posons $U=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

$(A-2I)U=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} -x+y+z=0\\ x-2y=0\\ x-2z=0\end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} y=z\\ x=2z\end{array}\right.$

Donc $E_2(A)=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mid y=z \text{ et } x=2z\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 2z\\ z\\ z\end{pmatrix}, z\in\mathbf{R}\right\}$.

Ainsi, $E_2(A)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right)$.

• $E_0(A)$ est non nul, ce qui confirme que 0 est valeur propre de A.
Le sous-espace propre de A associé à 0 est $E_0(A)$.

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_0(A)$ et libre car formée d'une seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_0(A)$.

De même, -1 et 2 sont des valeurs propres de A.

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sont des bases respectives de $E_{-1}(A)$ et $E_2(A)$.

3)$dimE_{-1}(A) + dimE_2(A) + dimE_0(A) = 1 + 1 + 1 = 3$ et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
D'après le théorème de réduction, A est diagonalisable.

Comme A est diagonalisable, elle peut s'écrire sous la forme réduite :

$$A = PDP^{-1}$$

D est une matrice diagonale dont la diagonale porte les valeurs propres de A,

P est une matrice inversible dont les colonnes sont formées des bases des sous-espaces propres de A, dans le même ordre que les valeurs propres de D.

Etant donnée la contrainte imposée par l'énoncé, on prend :

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4)On utilise la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow -\frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
5) AM+MA=0 &\iff PDP^{-1}M+MPDP^{-1}=0\\
&\iff P^{-1}\left(PDP^{-1}M+MPDP^{-1}\right)P=P^{-1}0P\\
&\iff DP^{-1}MP+P^{-1}MPD=0\\
&\iff DN+ND=0.
\end{aligned}
$$

6)Posons $N=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$.

$N\in\mathscr{E}$

$\iff DN+ND=0$

$\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} -a & -b & -c\\ 0 & 0 & 0\\ 2g & 2h & 2i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -a & 0 & 2c\\ -d & 0 & 2f\\ -g & 0 & 2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} -2a & -b & c\\ -d & 0 & 2f\\ g & 2h & 4i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\iff a=b=c=d=f=g=h=i=0.$

$\iff N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & e & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Donc $\mathscr{E}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & e & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, e\in\mathbf{R}\right\}$.

7)Soit $M\in\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et $N=P^{-1}MP$.

$M\in\mathscr{F}$

$\iff AM+MA=0$

$\iff DN+ND=0\quad$ d'après II.5

$\iff \exists e\in\mathbf{R}\mid N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & e & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

$\iff \exists e\in\mathbf{R}\mid P^{-1}MP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & e & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

$\iff \exists e\in\mathbf{R}\mid M=P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & e & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$.

$\iff \exists e\in\mathbf{R}\mid M=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & e & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3\\ 0 & -1/2 & 1/2\\ 1/3 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}$.

$\iff \exists e\in\mathbf{R}\mid M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & -e & 0\\ 0 & e & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3\\ 0 & -1/2 & 1/2\\ 1/3 & 1/6 & 1/6\end{pmatrix}$.

$\Longleftrightarrow \exists e \in \mathbf{R} \mid M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e/2 & -e/2 \\ 0 & -e/2 & e/2 \end{pmatrix}$.

$\Longleftrightarrow \exists e \in \mathbf{R} \mid M = \dfrac{e}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathscr{F} = \left\{ \dfrac{e}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, e \in \mathbf{R} \right\}$.

> Remarque
>
> $\mathscr{F} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
>
> $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ de dimension 1.

Exercice 2 (eml 2010)

Partie I

1)a)$x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$.
$x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.
Par composée, $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
$x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbf{R}$. Par différence, f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{1+x^2-2x}{1+x^2}$.

1)b)$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0$. Donc f est croissante sur $\mathbf{R}$.

1)c)f' est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. f' est donc dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbf{R}, f''(x) &= \frac{-2(1-x)(1+x^2) - 2x(1-x)^2}{\left(1+x^2\right)^2}\\ &= \frac{-2(1-x)(1+x^2+x(1-x))}{\left(1+x^2\right)^2}\\ &= \frac{2(x-1)(x+1)}{\left(1+x^2\right)^2}.\end{aligned}$$

2)$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln t = +\infty$.
Par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.
Par différence, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Quand $x \to +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est une forme indéterminée $(+\infty)-(+\infty)$.

Transformons l'écriture de $f(x)$.

$\forall x > 0, f(x) = x - \ln\left(x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)\right) = x - \ln\left(x^2\right) - \ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)$
$= x - 2\ln x - \ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) = x\left(1-2\dfrac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}+1 = 1$ et $\lim\limits_{t\to1} \ln t = 0$. Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-2\dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-2\dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

Par différence, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

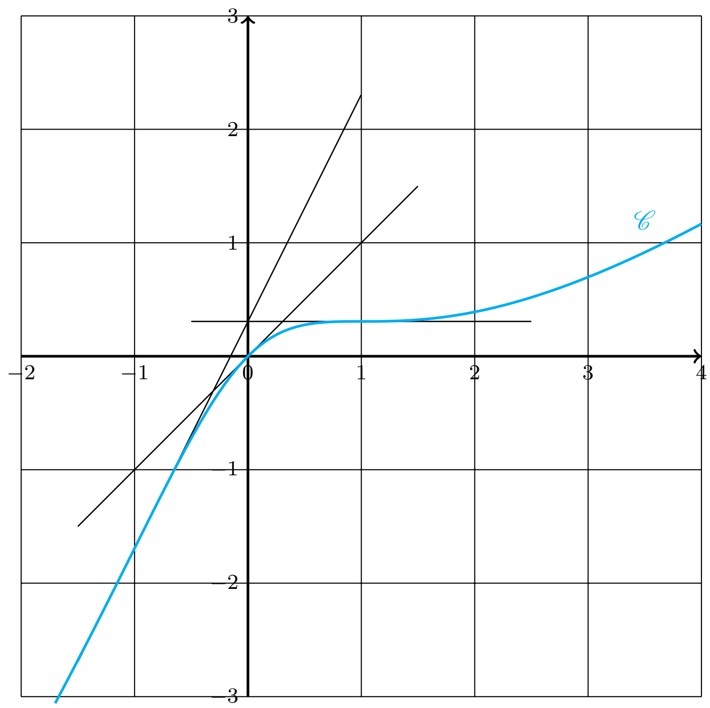
3)$f''(x)$ est du signe de $(x-1)(x+1)$.
$\forall x \in [-1,1], f''(x) \leq 0$ et $\forall x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[, f''(x) \geq 0$.
Donc f est convexe sur $]-\infty,-1]$, concave sur $[-1,1]$, puis convexe sur $[1,+\infty[$.

$\mathscr{C}$ admet deux points d'inflexion I_1 et I_2 d'abscisses respectives -1 et 1.
Plus précisément, $I_1(-1, -1-\ln 2)$ et $I_2(1, 1-\ln 2)$.

4)La tangente à $\mathscr{C}$ en 0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$, soit $y = x$.

La tangente à $\mathscr{C}$ en -1 a pour équation $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$,
soit $y = 2(x+1) - 1 - \ln 2$, c'est-à-dire $y = 2x + 1 - \ln 2$.

La tangente à $\mathscr{C}$ en 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, soit $y = 1 - \ln 2$.



5) $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(x - \ln(1+x^2)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2 - x\ln(1+x^2)\right)\mathrm{d}x$

$\displaystyle = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x - \int_0^1 x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x.$

Or, $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$

Donc $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \int_0^1 x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x.$

Dans l'intégrale de droite, posons $t = 1 + x^2$.

Donc $x^2 = t - 1$, puis $x = \sqrt{t-1}$ (car $x \geq 0$), ce qui donne $\varphi(t) = \sqrt{t-1}$.

$x = 0 \iff t = 1$ et $x = 1 \iff t = 2$.

$x\ln(1+x^2) = \sqrt{t-1}\ln t$.

$dx = \varphi'(t)dt = \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}dt.$

La formule de changement de variable donne :

$$\int_0^1 x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x = \int_1^2 \sqrt{t-1}\ln t \times \frac{1}{2\sqrt{t-1}}dt = \int_1^2 \frac{1}{2}\ln t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t\ln t - t\right]_1^2$$
$$= \frac{1}{2}\big((2\ln 2 - 2) - (1\ln 1 - 1)\big) = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

On déduit : $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \ln 2.$

Partie II

1)$\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = U_n - \ln\left(1+U_n^2\right) - U_n = -\ln\left(1+U_n^2\right)$.

Or, $\forall n \in \mathbf{N}, 1+U_n^2 \geq 1$ donc $\ln\left(1+U_n^2\right) \geq 0$, puis $U_{n+1} - U_n \leq 0$.

Donc la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

2)Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, U_n \geq 0$.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $U_n \geq 0$ ».

Par énoncé, $U_0 = 1 \geq 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On a par hypothèse de récurrence, $U_n \geq 0$.
Par croissance de f, on déduit : $f(U_n) \geq f(0)$, soit $U_{n+1} \geq 0$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}, U_n \geq 0$.

$(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

Posons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

f est continue sur $\mathbf{R}$ donc en l.
D'après le théorème du point fixe, l est donc un point fixe de f.

$$\begin{aligned}\text{Or, } f(l) = l &\iff l - \ln(1+l^2) = l\\ &\iff \ln(1+l^2) = 0\\ &\iff 1+l^2 = 1\\ &\iff l = 0.\end{aligned}$$

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

3)Programme Python

```
import numpy as np
u=1
n=0
while u>1/1000:
    u=u-np.log(1+u**2)
    n=n+1
print(n)
```

4)a)Etudions sur $[0,1]$ la fonction $g : x \mapsto x - \frac{1}{2}x^2 - f(x)$.

g est dérivable sur $[0,1]$ comme différence de fonctions dérivables et

$\forall x \in [0,1]\,, g'(x) = 1 - x - f'(x) = 1 - x - \dfrac{1+x^2-2x}{1+x^2}$
$\dfrac{(1-x)(1+x^2)-1-x^2+2x}{1+x^2} = \dfrac{x-x^3}{1+x^2} = \dfrac{x(1-x^2)}{1+x^2}.$
$\forall x \in [0,1]\,, g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[0,1]$.
Or, $g(0) = -f(0) = 0$. Donc $\forall x \in [0,1]\,, g(x) \geq 0$.
Ainsi, $\forall x \in [0,1]\,, f(x) \leq x - \dfrac{1}{2}x^2$.

4)b)$(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, de premier terme 1 et converge vers 0.
Donc $\forall n \in \mathbf{N}, U_n \in [0,1]$.
Il est donc licite d'utiliser la question 4)a) en remplaçant x par U_n, ce qui donne :
$\forall n \in \mathbf{N}, f(U_n) \leq U_n - \dfrac{1}{2}U_n^2$, soit $U_{n+1} \leq U_n - \dfrac{1}{2}U_n^2$, puis $2U_{n+1} \leq 2U_n - U_n^2$.
Finalement, on a $\forall n \in \mathbf{N}, U_n^2 \leq 2(U_n - U_{n+1})$.

4)c)La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 2(U_n - U_{n+1})$ a même nature que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(U_n - U_{n+1})$,
cette dernière étant une série télescopique convergente du fait que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ converge.
Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 2(U_n - U_{n+1})$ converge.
D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n^2$ converge elle aussi.

Partie III

1)Les fonctions $(x,y) \mapsto x+y$, $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont polynomiales donc de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$. De plus, f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.
Par composée, les fonctions $(x,y) \mapsto f(x+y)$, $(x,y) \mapsto f(x)$ et $(x,y) \mapsto f(y)$ sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$.
Par différence, F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$.
Pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a : $\partial_1 F(x,y) = \partial_1\big(f(x+y)\big) - f'(x) - 0$.
Par dérivation composée : $\partial_1\big(f(x+y)\big) = \partial_1(x+y)f'(x+y) = 1f'(x+y)$.
Donc $\partial_1 F(x,y) = f'(x+y) - f'(x)$.
De même, $\partial_2 F(x,y) = f'(x+y) - f'(y)$.

2) (S) $\begin{cases} f'(x) & = & f'(y) \\ f'(x+y) & = & f'(x) \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{2x}{1+x^2} & = & 1 - \dfrac{2y}{1+y^2} \\ 1 - \dfrac{2(x+y)}{1+(x+y)^2} & = & 1 - \dfrac{2x}{1+x^2} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2} & = & \dfrac{2y}{1+y^2} \\ \dfrac{2(x+y)}{1+(x+y)^2} & = & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x(1+y^2) & = & y(1+x^2) \\ (x+y)(1+x^2) & = & x\big(1+(x+y)^2\big) \end{cases}$$

Or, $x(1+y^2) = y(1+x^2) \iff x + xy^2 = y + yx^2 \iff x - y + xy^2 - yx^2 = 0$
$\iff x - y + xy(y-x) = 0 \iff (x-y)(1-xy) = 0 \iff x = y$ ou $1 - xy = 0$.

Donc le système initial (S) est équivalent à $\begin{cases} x = y \text{ ou } xy = 1 \\ \quad\quad \text{et} \\ (x+y)(1+x^2) = x\big(1+(x+y)^2\big) \end{cases}$

Premier cas : $x = y$
La deuxième équation est équivalente à :
$2x(1+x^2) = x\big(1+(2x)^2\big) \iff 2x + 2x^3 = x + 4x^3 \iff x - 2x^3 = 0$
$\iff x(1-2x^2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Les solutions de (S) sont alors $(0,0)$; $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ et $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

Deuxième cas : $xy = 1$
La deuxième équation est équivalente à :
$x + x^3 + y + x^2y = x + x(x^2 + 2xy + y^2) \iff \cancel{x} + \cancel{x^3} + y + x^2y = \cancel{x} + \cancel{x^3} + 2x^2y + xy^2$
$\iff y - x^2y - xy^2 = 0 \iff y - xy(x+y) = 0 \iff y - 1(x+y) = 0 \iff x = 0$.

Ceci contredit le fait que $xy = 1$. Donc (S) n'a pas de solution.

En conclusion, les solutions de (S) sont $(0,0)$; $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ et $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

Par ailleurs, les points critiques de f sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \partial_1 F(x,y) & = 0 \\ \partial_2 F(x,y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f'(x+y) - f'(x) & = 0 \\ f'(x+y) - f'(y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f'(x+y) & = f'(x) \\ f'(x+y) & = f'(y) \end{cases}$$

Ce sont donc les solutions de (S).

Donc les points critiques de f sont $(0,0)$; $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ et $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

3)F est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a :

$\partial_{1,1} F(x,y) = f''(x+y) - f''(x)$,

$\partial_{2,1} F(x,y) = \partial_{1,2} F(x,y) = f''(x+y)$,

$\partial_{2,2} F(x,y) = f''(x+y) - f''(y)$.

Etude au point $(0,0)$:
$\partial_{1,1} F(0,0) = f''(0) - f''(0) = 0$,

$\partial_{2,1} F(0,0) = \partial_{1,2} F(0,0) = f''(0) = 1$,

$\partial_{2,2} F(0,0) = f''(0) - f''(0) = 0$.

Donc $\nabla^2 F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre de $\nabla^2 F(0,0)$
$\iff \nabla^2 F(0,0) - \lambda I$ n'est pas inversible
$\iff \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible
$\iff (-\lambda) \times (-\lambda) - 1 \times 1 = 0$
$\iff \lambda^2 = 1$
$\iff \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Les valeurs propres de $\nabla^2 F(0,0)$ sont non nulles et de signes contraires. Donc f n'admet pas d'extrémum local en $(0,0)$, c'est un point selle.

Etude au point $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$:

$\partial_{1,1}F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = f''\left(2\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - f''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{9} - \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{2}{3}$,

$\partial_{2,1}F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \partial_{1,2}F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = f''\left(2\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{9}$,

$\partial_{2,2}F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = f''\left(2\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - f''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{3}$.

Donc $\nabla^2 F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/9 \\ 2/9 & 2/3 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre de $\nabla^2 F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

$\Longleftrightarrow \nabla^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \lambda I$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2/3-\lambda & 2/9 \\ 2/9 & 2/3-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)^2 = \left(\frac{2}{9}\right)^2$
$\Longleftrightarrow \frac{2}{3} - \lambda = \frac{2}{9}$ ou $\frac{2}{3} - \lambda = -\frac{2}{9}$
$\Longleftrightarrow \lambda = 4/9$ ou $\lambda = 8/9$.

Les valeurs propres de $\nabla^2 F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ sont non nulles et strictement positives. Donc F admet en $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ un minimum local.

Même conclusion en $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ car $\nabla^2 F\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \nabla^2 F\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

Exercice 3 (eml 2007)

1)On remarque que f est la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1.

2)a)Comme $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$, la fonction de répartition F_X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Cela va servir pour la suite...

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= P(n \leq X < n+1) \\ &= F_X(n+1) - F_X(n) \quad \text{car } X \text{ est à densité} \\ &= \left(1 - e^{-(n+1)}\right) - \left(1 - e^{-n}\right) \\ &= e^{-n} - e^{-(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}. \end{aligned}$$

b)$Y(\Omega) = \mathbf{N}$ donc $(Y+1)(\Omega) = \mathbf{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$P(Y+1 = n) = P(Y = n-1) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-(n-1)} = \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Donc $Y + 1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

Le cours donne : $E(Y+1) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \dfrac{e}{e-1}$.

Par linéarité de l'espérance, on a : $E(Y+1) = E(Y) + 1$.

On déduit : $E(Y) + 1 = \dfrac{e}{e-1}$, d'où $E(Y) = \dfrac{e}{e-1} - 1 = \dfrac{1}{e-1}$.

Le cours donne également : $V(Y+1) = \dfrac{\frac{1}{e}}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} = \dfrac{e}{(e-1)^2}$.

Or, d'après le cours : $V(Y+1) = 1^2 V(Y) = V(Y)$. D'où, $V(Y) = \dfrac{e}{(e-1)^2}$.

c)Programme Python

```
u=rd.random()
y=0
while u<np.exp(-1):
    y=y+1
    u=rd.random()
print("y vaut",y)
```

3)a)Les variables aléatoires U et Y sont indépendantes. D'après le lemme des coalitions, toute fonction de l'une est indépendante de toute fonction de l'autre. Ainsi, $2U - 1$ et Y sont indépendantes.

$T = (2U - 1)Y$ admet donc une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}E(T) &= E(2U-1)E(Y)\\ &= \big(2E(U)-1\big)E(Y) \quad \text{par linéarité de l'espérance}\\ &= \left(2\times\frac{1}{2}-1\right)E(Y) \quad \text{car } U \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)\\ &= 0.\end{aligned}$$

b)• $U \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)$ donc $U(\Omega)=\{0,1\}$.
Soit $\omega\in\Omega$. Distinguons deux cas :
Premier cas : $U(\omega)=1$
$T(\omega)=\big(2U(\omega)-1\big)Y(\omega)=\big(2\times 1-1\big)Y(\omega)=Y(\omega)$.
On déduit : $T^2(\omega)=(T(\omega))^2=(Y(\omega))^2=Y^2(\omega)$.
Deuxième cas : $U(\omega)=0$
$T(\omega)=\big(2U(\omega)-1\big)Y(\omega)=\big(2\times 0-1\big)Y(\omega)=-Y(\omega)$.
On déduit : $T^2(\omega)=(T(\omega))^2=(-Y(\omega))^2=(Y(\omega))^2=Y^2(\omega)$.
On a donc $\forall\omega\in\Omega,\ T^2(\omega)=Y^2(\omega)$. Ainsi, $T^2=Y^2$.
• On sait que Y admet une variance donc Y^2 admet une espérance (Koenig).
Donc T^2 admet une espérance.
D'après la formule de Koenig, T admet une variance donnée par :

$$\begin{aligned}V(T) &= E\left(T^2\right)-E(T)^2\\ &= E\left(Y^2\right)-E(T)^2\\ &= V(Y)+\big(E(Y)\big)^2-E(T)^2 \quad \text{d'après la formule de Koenig}\\ &= \frac{e}{(e-1)^2}+\left(\frac{1}{e-1}\right)^2-0^2\\ &= \frac{e+1}{(e-1)^2}.\end{aligned}$$

c)La formule des probabilités totales pour le sce $\big((U=0),(U=1)\big)$ donne pour tout $n\in\mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned}&P(T=n)\\ &= P\big((T=n)\cap(U=0)\big)+P\big((T=n)\cap(U=1)\big)\\ &= P\big(((2U-1)Y=n)\cap(U=0)\big)+P\big(((2U-1)Y=n)\cap(U=1)\big)\\ &= P\big((-Y=n)\cap(U=0)\big)+P\big((Y=n)\cap(U=1)\big)\\ &= P\big((Y=-n)\cap(U=0)\big)+P\big((Y=n)\cap(U=1)\big)\\ &= P(Y=-n)P(U=0)+P(Y=n)P(U=1)\\ &= \frac{1}{2}\big(P(Y=-n)+P(Y=n)\big) \quad \text{car } P(U=0)=P(U=1)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Distinguons 3 cas :
• $n>0$
L'évenement $(Y=-n)$ est impossible car Y est positive.
Donc $P(T=n)=\dfrac{1}{2}P(Y=n)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)e^{-n}$.
• $n<0$
L'évenement $(Y=n)$ est impossible car Y est positive.

Donc $P(T=n) = \dfrac{1}{2}P(Y=-n) = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)e^n$.

• $n = 0$

$P(T=0) = \dfrac{1}{2}\big(P(Y=0)+P(Y=0)\big) = P(Y=0) = 1-\dfrac{1}{e}$.

Conclusion :

$$P(T=n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)e^n & \text{si } n<0 \\[2ex] 1-\dfrac{1}{e} & \text{si } n=0 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)e^{-n} & \text{si } n>0 \end{cases}$$

4)a)Pour tout réel t, on a :

$F_D(t)$

$= P(D \leq t)$

$= P(X-Y \leq t)$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P\big((X-Y\leq t)\cap(Y=n)\big)$ probabilités totales pour le sce $(Y=n)_{n\in\mathbf{N}}$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P\big((X-n\leq t)\cap(Y=n)\big)$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P\big((X\leq n+t)\cap(n\leq X<n+1)\big)$

b)• Si $t<0$, on a $\forall n\in\mathbf{N},\ n+t<n$. Les événements $(X\leq n+t)$ et $(n\leq X)$ sont alors incompatibles.

Donc $\forall n\in\mathbf{N},\ P\big((X\leq n+t)\cap(n\leq X<n+1)\big)=0$.

Cela entraîne $F_D(t)=0$.

• Si $t\geq 1$, on a $\forall n\in\mathbf{N},\ n+t\geq n+1$.

Donc $(n\leq X<n+1)\subset(X\leq n+t)$.

D'où, $(X\leq n+t)\cap(n\leq X<n+1) = (n\leq X<n+1)$.

En reportant dans l'égalité 4)a), on a :

$$\begin{aligned} F_D(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(n\leq X<n+1) \\ &= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(n\leq X<n+1)\right) \quad \text{par incompatibilité 2 à 2} \\ &= P(X\geq 0) \\ &= 1-P(X<0) \\ &= 1-F_X(0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

c)Soit $t \in [0,1[$ un réel.

$P(n \le X \le n+t) = F_X(n+t) - F_X(n) = \left(1 - e^{-(n+t)}\right) - (1 - e^{-n}) = e^{-n}\left(1 - e^{-t}\right)$.

d)Soit $t \in [0,1[$ un réel. On a alors : $n \le n+t < n+1$.

Donc $(X \le n+t) \cap (n \le X < n+1) = (n \le X \le n+t)$.

En reportant dans l'égalité 4)a), on obtient :

$$\begin{aligned} F_D(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(n \le X \le n+t) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}\left(1 - e^{-t}\right) \\ &= \left(1 - e^{-t}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \\ &= (1 - e^{-t}) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-1}\right)^n \\ &= \left(1 - e^{-t}\right) \times \frac{1}{1 - e^{-1}} \quad \text{car } -1 < e^{-1} < 1 \\ &= \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}}. \end{aligned}$$

e)Les questions précédentes donnent : $F_D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}} & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{si } t \ge 1 \end{cases}$

• F_D est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[1, +\infty[$ (donc continue à droite en 1), comme fonction constante. F_D est continue sur $[0,1[$ (donc continue à droite en 0) comme quotient, différence et composée de fonctions continues.

$\lim\limits_{t \to 0^-} F_D(t) = 0 = F_D(0)$ donc F_D est continue à gauche en 0.

Donc F_D est continue en 0.

$\lim\limits_{t \to 1^-} F_D(t) = \lim\limits_{t \to 1^-} \dfrac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}} = \dfrac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-1}} = 1 = F_D(1)$ donc F_D est continue à gauche en 1.

Donc F_D est continue en 1.

Finalement, F_D est continue sur $\mathbf{R}$.

• F_D est C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $[1, +\infty[$(fonction constante). F_D est C^1 sur $[0,1[$ comme quotient, différence et composée de fonctions C^1.

Donc F_D est C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1.

• D est donc à densité. Une densité f_D est donnée par la dérivée de F_D aux points où elle est dérivable, une valeur arbitraire (par exemple 0) ailleurs.

On obtient : $f_D(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}}{1 - e^{-1}} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$