DM10 cubes
à rendre le lundi / /

Exercice 1 :

1)a)Justifier que $\forall n \in \mathbf{N},\ t^n e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

b)Déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Par la suite, on note pour tout $n \in \mathbf{N}$: $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2)a)Etablir à l'aide d'une intégration par parties que $\forall n \in \mathbf{N},\ I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

b)Montrer que $\forall p \in \mathbf{N},\ I_{2p+1} = 0$.

c)Montrer que $\forall p \in \mathbf{N},\ I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$.

Exercice 2

Dans cet exercice, x et y désignent des réels strictement positifs.
Un commerçant se fournit auprès d'un grossiste pour constituer son stock du début de la saison, lequel consiste en un certain nombre d'unités d'un produit de consommation.
Chaque unité vendue par ce commerçant lui rapporte un bénéfice de x euros, alors que chaque unité invendue à la fin de la saison engendre une perte nette de y euros.
Ce commerçant doit constituer son stock au début de la saison et désire déterminer la taille n de ce stock afin de maximiser son espérance de gain.
On admet que le nombre d'unités commandées au commerçant pendant la saison est une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}$.
On note Y_n la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du commerçant à la fin de la saison.
On désigne par U la variable aléatoire qui vaut 1 si $X \leq n$ et qui vaut 0 si $X > n$.

1)En distinguant deux cas selon la valeur de U, montrer que :
$Y_n = [xX - (n - X)y]U + nx(1 - U)$.

2)a)Vérifier que la variable aléatoire XU prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

b)Exprimer sous forme de somme l'espérance de XU à l'aide de la loi de X.

c)Montrer enfin que $E(Y_n) = nx + (x + y)\sum_{k=0}^{n}(k - n)P(X = k)$.

Dans toute la suite, on suppose que $P(X = 0) < \frac{x}{x + y}$.

3)a)Exprimer $E(Y_{n+1}) - E(Y_n)$ en fonction de x, y et $\sum_{k=0}^{n} P(X = k)$.

b)Montrer qu'il existe un unique entier naturel n_0 tel que :
$\sum_{k=0}^{n_0} P(X = k) < \frac{x}{x + y}$ et $\sum_{k=0}^{n_0+1} P(X = k) \geq \frac{x}{x + y}$.

c)En déduire que le commerçant est sûr de maximiser son espérance de gain en constituant un stock de taille $n_1 = n_0 + 1$.