DS2 cubes ecg2 maths appliquées - 13/11/2024

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.
On dit qu'une matrice $A \in M_n(R)$ est nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que

$$A^{k-1} \neq 0_n \text{ et } A^k = 0_n$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n.
Soit $A \in M_n(R)$. On dit que le couple (Δ, N) est une *décomposition de Dunford* de A si

$$\begin{cases} \Delta \text{ est une matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.
Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a) Déterminer les valeurs propres de A.
   b) A est-elle diagonalisable ?
3. On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   a) Calculer les produits ΔX_1, ΔX_2 et ΔX_3.
   b) Justifier que Δ est diagonalisable et déterminer P inversible telle que $\Delta = PDP^{-1}$.
   c) Calculer P^{-1}.
4. a) Etablir que N est une matrice nilpotente.
   b) Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.
   c) En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner pour tout entier $p \geq 1$, l'expression de A^p en fonction des puissances de Δ, de N et de p.
   d) Etablir que pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\quad \Delta^k N = N\Delta^k = N$.
   e) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\quad \Delta^k = PD^kP^{-1}$.
   f) Proposer pour tout entier $p \geq 1$, une décomposition de Dunford de A^p.

EXERCICE 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
   (a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.
   (b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathrm{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II

1. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
   En déduire $\mathrm{E}(Z_1)$ et $\mathrm{E}(Z_2)$.
2. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
   (a) Déterminer $\mathrm{P}(Z_k = 1)$
   (b) Déterminer $\mathrm{P}(Z_k = k)$.
   (c) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathrm{P}(Z_{k+1} = \ell) = \dfrac{\ell}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell) + \dfrac{n - \ell + 1}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell - 1)$.
   (d) En déduire : $\mathrm{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{E}(Z_k) + 1$.
3. (a) Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathrm{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.
   (b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathrm{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

1. Rappeler la valeur de $\mathrm{P}(Z_k = 1)$. Déterminer $\mathrm{P}(Z_k \geq 5)$.
2. Montrer : $\mathrm{P}(Z_k = 2) = 6\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.
3. On note, pour tout i de $[\![1; 4]\!]$, A_i l'événement :
   " la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages".
   (a) Montrer : $\mathrm{P}(Z_k \leqslant 3) = 4\mathrm{P}(A_1) - 6\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) + 4\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.
   Indication : on pourra utiliser la formule du crible à 4 parties ci-dessous
   $$P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq 4} A_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq 4} A_i\right)$$
   (b) Calculer $\mathrm{P}(A_1)$, $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.
   (c) En déduire : $\mathrm{P}(Z_k \leqslant 3)$, puis $\mathrm{P}(Z_k = 3)$ et $\mathrm{P}(Z_k = 4)$.

Exercice 3

Partie A

Dans cette partie, on étudie les fonctions sh et ch, appelées respectivement *sinus hyperbolique* et *cosinus hyperbolique* définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1)Etudier la parité des fonctions sh et ch.

2)a)Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} sh(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} sh(x)$.

b)Justifier que sh est dérivable sur $\mathbf{R}$, calculer sa dérivée et l'exprimer à l'aide de la fonction ch.

c)Dresser le tableau de variations de sh.

d)Etudier le signe de $sh(x)$ suivant les valeurs de x.

e)Etudier la convexité de la fonction sh.

3)a)Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} ch(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} ch(x)$.

b)Justifier que ch est dérivable sur $\mathbf{R}$, calculer sa dérivée et l'exprimer à l'aide de la fonction sh.

c)Dresser le tableau de variations de ch, puis vérifier : $\forall x \in \mathbf{R}^*,\ ch(x) > 1$.

d)Etudier la convexité de la fonction ch.

4)a)Montrer que $\forall x \in \mathbf{R},\ ch(x) > sh(x)$.

b)Montrer que $\forall x \in \mathbf{R},\ \big(ch(x)\big)^2 = 1 + \big(sh(x)\big)^2$.

c)Montrer que $\forall x \geq 0,\ sh(x) \geq x$.

d)Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions sh et ch ainsi que leur tangente au point d'abscisse 0.

Partie B

Dans cette partie, on étudie la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{xsh(x)}{ch(x) - 1} \quad \text{et} \quad f(0) = 2.$$

5)a)Ecrire le développement limité en 0 à l'ordre 1 de la fonction sh.

b)Ecrire le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction ch.

6)a)A l'aide de la question 5), montrer que f est continue à droite en 0.

b)Conclure que f est continue sur $[0, +\infty[$.

7)a)Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, puis montrer à l'aide de la question A4)b) que

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{sh(x) - x}{chx - 1}.$$

b)Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c)Dresser le tableau de variations de f.

d)On admet que les fonctions sh et ch admettent un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :

$sh(x) \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $ch(x) \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.

Montrer alors que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. Que peut-on en conclure ?

8)a)Montrer que $f(x) - x \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{e^x}$.

b)En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - x\big)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

9)Pour tout $x \geq 0$, on pose :

$$g(x) = xsh(x) + 2 - 2ch(x).$$

a)Justifier que g est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \geq 0,\ g''(x) = xsh(x)$.

b)En déduire le sens de variation de g', puis le signe de g'.

c)Conclure que $\forall x \geq 0,\ g(x) \geq 0$.

d)Montrer que $\forall x > 0,\ f''(x) = \dfrac{g(x)}{\big(ch(x) - 1\big)^2}$. Conclure que f est convexe.

10)Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ et tous les éléments qui vous paraissent utiles.