Correction DM8 cubes

<u>Exercice 1 : (edhec 2017 - maths approfondies)</u>

1)$A = J - (n+1)I$.

Donc $A^2 = \big(J - (n+1)I\big)^2 = J^2 - 2(n+1)J + (n+1)^2 I$.

Or, $J^2 = nJ$. Donc $A^2 = -(n+2)J + (n+1)^2 I \quad (*)$

2)• De $A = J - (n+1)I$, on tire $J = A + (n+1)I$ que l'on substitue dans $(*)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} A^2 &= -(n+2)\big(A + (n+1)I\big) + (n+1)^2 I \\ &= -(n+2)A + \big((n+1)^2 - (n+2)(n+1)\big)I \\ &= -(n+2)A - (n+1)I. \end{aligned}$$

Donc $A^2 + (n+2)A + (n+1)I = 0$.

Posons $P(X) = X^2 + (n+2)X + n + 1$.

On a alors $P(A) = 0$, ce qui montre que P est un polynôme annulateur de A.

• Le discriminant de P vaut $\Delta = (n+2)^2 - 4(n+1) = n^2 > 0$.

P admet donc deux racines données par :

$x_1 = \dfrac{-(n+2) - \sqrt{n^2}}{2} = -n - 1$ et $x_2 = \dfrac{-(n+2) + \sqrt{n^2}}{2} = -1$.

Comme P est un polynôme annulateur de A, on a $sp(A) \subset \{-1, -n-1\}$.

Il faut aller plus loin en étudiant si -1 et $-n-1$ sont des valeurs propres de A.

Or, $A + (n+1)I = J$ et $rg(J) = 1$ puisque toutes ses colonnes sont identiques (et non nulles).

Donc $rg(A + (n+1)I = 1 < n$ ce qui prouve que $A + (n+1)I$ n'est pas inversible.

Donc $-n-1$ est valeur propre de A.

Enfin, $A + I = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1-n & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1-n \end{pmatrix}$.

La somme des colonnes de $A + I$ est nulle donc ces colonnes sont liées.

Donc $rg(A + I) \leq n - 1 < n$, ce qui prouve que $A + I$ n'est pas inversible.

Donc -1 est valeur propre de A.

• Finalement, $sp(A) = \{-1, -n-1\}$.

3)$0 \notin sp(A)$ donc A est inversible.

4)Déterminons la dimension des sous-espaces propres de A.

• $E_{-n-1}(A) = \big\{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \mid (A + (n+1)I)U = 0\big\}$.

Posons $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$.

$(A+(n+1)I)U=0$
$\iff JU=0$
$$\iff \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$
$\iff x_1+...+x_n=0.$

Donc $E_{-n-1}(A)=\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} |x_1+...+x_n=0 \right\}.$

Soit φ l'application de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ définie par :
$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}),\ \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = x_1+...+x_n.$$

φ est linéaire et $Ker\varphi = E_{-n-1}(A)$.

$Im\varphi \subset \mathbf{R}$ donc $Im\varphi$ est de dimension 0 ou 1.
φ n'étant pas l'endomorphisme nul, $Im\varphi \neq \{0\}$ donc $dimIm\varphi = 1$.

Le théorème du rang donne alors : $dimKer\varphi = dim\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) - dimIm\varphi = n-1$.

Ainsi, $dimE_{-n-1}(A)=n-1$.

• -1 est valeur propre de A donc $dimE_{-1}(A) \geq 1$.
On ne peut pas avoir $dimE_{-1}(A)>1$ car sinon, on aurait :
$dimE_{-n-1}(A)+dimE_{-1}(A)>n$, ce qui est impossible !
Donc $dimE_{-1}(A)=1$.

On a finalement $dimE_{-n-1}(A)+dimE_{-1}(A)=n$.
D'après le théorème de réduction, A est diagonalisable.

✓ On pouvait s'épargner tout ce travail en remarquant que A est symétrique donc diagonalisable !

Exercice 2 : (eml 2018 - maths approfondies)

1)$Z_2(\Omega) = \{0, 1\}$.

L'événement $(Z_2 = 0)$ est réalisé si et seulement si les deux premiers tirages amènent le même numéro.
Il y a n^2 tirages possibles.
Les tirages qui réalisent cet événement sont $(1,1)$, $(2,2)$, ..., (n,n). Il y en a n.

Donc $P(Z_2 = 0) = \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$.

On déduit : $P(Z_2 = 1) = 1 - P(Z_2 = 0) = \dfrac{n-1}{n}$.

Ainsi, $Z_2 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$.

2)a)Soit $j \in Y_k(\Omega)$.
Supposons que l'événement $(Y_k = j)$ est réalisé.
Cela signifie que j numéros distincts ont été tirés lors des k premiers tirages. Il reste donc $n - j$ numéros qui n'ont pas encore été tirés.
L'événement $(Z_{k+1} = 1)$ se réalise alors si et seulement si le $k+1$-ème tirage amène l'un de ces $n - j$ numéros.

Donc $P_{(Y_k=j)}(Z_{k+1} = 1) = \dfrac{n-j}{n} = 1 - \dfrac{j}{n}$.

b)La formule des probabilités totales pour le s.c.e $(Y_k = j)_{1 \le j \le min(k,n)}$ donne :

$$\begin{aligned}
P(Z_{k+1} = 1) &= \sum_{j=1}^{min(k,n)} P_{(Y_k=j)}(Z_{k+1} = 1) P(Y_k = j) \\
&= \sum_{j=1}^{min(k,n)} \left(1 - \frac{j}{n}\right) P(Y_k = j) \\
&= \sum_{j=1}^{min(k,n)} \left(P(Y_k = j) - \frac{j}{n} P(Y_k = j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{min(k,n)} P(Y_k = j) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{min(k,n)} j P(Y_k = j) \\
&= 1 - \frac{1}{n} E(Y_k).
\end{aligned}$$

c)En remarquant que $Y_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} Z_j$ et en utilisant la question 2)b), on obtient :

$$\begin{aligned}
P(Z_{k+1} = 1) &= 1 - \frac{1}{n} E\left(\sum_{j=1}^{k} Z_j\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} E(Z_j) \text{ par linéarité} \\
&= 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} P(Z_j = 1) \text{ car } Z_j \text{ suit une loi de Bernoulli.}
\end{aligned}$$

3)Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : « $P(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$ ».

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $P(Z_1 = 1) = 1$ ». C'est vrai car Z_1 est certaine et égale à 1.
Soit $k \geq 1$. Supposons $\mathscr{P}(1)$, ..., $\mathscr{P}(k)$ vraies. Montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Par hyp. de récurrence, on a : $\forall j \in [\![1, k]\!],\ P(Z_j = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}$.

La question 2)c) donne alors :

$$\begin{aligned} P(Z_{k+1} = 1) &= 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} \\ &= 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{i} \text{ en posant } i = j - 1 \\ &= 1 - \frac{1}{n} \times \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
D'après l'axiome de récurrence forte, on conclut que
$\forall k \geq 1,\ P(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$.

4)La question 2)b) donne : $P(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}E(Y_k)$.

On déduit :
$$\begin{aligned} E(Y_k) &= n\left(1 - P(Z_{k+1} = 1)\right) \\ &= n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right) \text{ par la question 3).} \end{aligned}$$