Correction DS2 cubes

Exercice 1 (ecricome 2011)

1)Δ est diagonale donc diagonalisable (écrire $\Delta = I^{-1}\Delta I$).

$N^2 = 0$ donc N est nilpotente.

$\Delta N = N$ et $N\Delta = N$ donc $\Delta N = N\Delta$.

Enfin, $A = N + \Delta$.

Donc (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

2)a)Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on transforme $A - \lambda I$ en une matrice triangulaire.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ L_2 \longleftrightarrow L_1 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 & 4 - 2\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \longleftarrow (3-\lambda)L_1 + 2L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

λ est valeur propre de A

$\iff A - \lambda I$ n'est pas inversible

$\iff \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 & 4 - 2\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\iff \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ou $1 - \lambda = 0$

$\iff \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

Donc $sp(A) = \{1, 2\}$.

b)Cherchons les sous-espaces propres de A.

$E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A - I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y - z = 0 & L_1 \\ -2x - y + 2z = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y - z = 0 & L_1 \\ z = 0 & L_2 \longleftrightarrow L_1 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = -2x \text{ et } z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$
$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_1(A)$.
Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_1(A)$ et $dim E_1(A) = 1$.

$E_2(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - 2I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A - 2I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} x + y - z & = 0 \\ -2x - 2y + 2z & = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = -x \text{ et } z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$
$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_2(A)$.
Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_2(A)$ et $dim E_2(A) = 1$.
La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à 2, mais $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
D'après le théorème de réduction, A n'est pas diagonalisable.

> Remarque
> On n'était pas obligé de chercher une base des s.e.p, avoir leur dimension suffisait. On obtenait leur dimension par la formule de cours :
> $dim E_1(A) + rg(A - I) = 3$ et $dim E_2(A) + rg(A - 2I) = 3$.
> Il suffisait alors de chercher le rang de $A - I$ et de $A - 2I$.

3)a)$\Delta X_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Delta X_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Delta X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

b)Les calculs précédents donnent : $\Delta X_1 = 2X_1$, $\Delta X_2 = X_2$ et $\Delta X_3 = X_3$.
Ils montrent d'une part, que X_1 est un vecteur propre de Δ associé à 2, d'autre part que X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A associés à 1.
(On vérifie au passage que X_1, X_2 et X_3 sont non nuls).

(X_1) est une famille de $E_2(A)$, libre car formée d'un seul vecteur non nul.
(X_2, X_3) est une famille de $E_1(A)$, libre également par non colinéarité des vecteurs.
Par concaténation de familles libres provenant de sous-espaces propres différents, on conclut que la famille (X_1, X_2, X_3) est libre.
C'est une famille libre dont le cardinal vaut 3 et coïncide avec la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, c'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
On vient de construire une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ dont chaque vecteur est un vecteur propre de Δ, ce qui prouve que Δ est diagonalisable.

> Remarque
> On pouvait aussi faire une recherche systématique de valeurs propres en transformant par Gauss $\Delta - \lambda I$ en une matrice triangulaire. C'est plus long puisqu'il faudrait ensuite chercher les sous-espaces propres et leur dimension.

Δ est diagonalisable. D'après le cours, il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ inversible et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ diagonale telles que $\Delta = PDP^{-1}$.

Les colonnes de P sont formées des bases des sous-espaces propres de Δ.
D porte en diagonale les valeurs propres de A rangées dans le même ordre que les colonnes de P.

La matrice D est déjà donnée par l'énoncé. La première colonne de P est donc formée d'une base de $E_2(A)$, les deuxième et troisième colonnes sont formées d'une base de $E_1(A)$.

On peut prendre par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

> Remarque
> Il n'y a pas unicité de P puisqu'il n'y a pas unicité des bases des sous-espaces propres.

c)Par la méthode de Gauss, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4)a)On trouve $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc N est nilpotente.

b)On sait déjà que Δ est diagonalisable et que N est nilpotente.
De plus, le produit donne : $N\Delta = N$ et $\Delta N = N$ donc $N\Delta = \Delta N$.
Enfin, on a clairement : $A = N + \Delta$.

Donc (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

c)
$$\begin{aligned} A^p &= (N+\Delta)^p \\ &= \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} N^k \Delta^{p-k} \quad \text{valide car } N\Delta = \Delta N \\ &= \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} N^0 \Delta^p + \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} N^1 \Delta^{p-1} + \sum_{k=2}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \underbrace{N^k}_{=0} \Delta^{p-k} \\ &= \Delta^p + pN\Delta^{p-1}. \end{aligned}$$

d)Démonstration par récurrence.
Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : « $\Delta^k N = N\Delta^k = N$ ».

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $\Delta N = N\Delta = N$ », c'est vrai car montré dans 4)b).

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
De l'hypothèse de récurrence $\Delta^k N = N$, en multipliant à gauche par Δ :

$\Delta\Delta^k N = \Delta N$, soit $\Delta^{k+1} N = N$ car $\Delta N = N$.

De l'hypothèse de récurrence $N\Delta^k = N$, en multipliant à droite par Δ :

$N\Delta^k\Delta = N\Delta$, soit $N\Delta^{k+1} = N$ car $N\Delta = N$.
On a établi que $\Delta^{k+1}N = N\Delta^{k+1} = N$ donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \Delta^k N = N\Delta^k = N$.

e)Démonstration par récurrence.
Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition « $\Delta^k = PD^kP^{-1}$.

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $\Delta = PDP^{-1}$, ce qui est vrai d'après 3)b).

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} &= \Delta^k\Delta \\ &= PD^kP^{-1}PDP^{-1} \quad \text{grâce à HR et 3)b)} \\ &= PD^kIDP^{-1} \\ &= PD^{k+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \Delta^k = PD^kP^{-1}$.

f)La question 4)d) donne en particulier : $N\Delta^{p-1} = N$.
De la question 4)c), on déduit alors :

$$A^p = \Delta^p + pN.$$

D'après la question 4)e), la matrice Δ^p est semblable à la matrice D^p, laquelle est diagonale, comme puissance d'une matrice diagonale.
Donc Δ^p est diagonalisable.

De plus, N étant nilpotente, pN l'est également.

Enfin, on a :

$\Delta^p(pN) = p\Delta^p N = pN$ grâce à 4)d),
et $(pN)\Delta^p = pN\Delta^p = pN$ de nouveau grâce à 4)d).
Donc $(pN)\Delta^p = \Delta^p(pN)$.

Ainsi, (Δ^p, pN) est une décomposition de Dunford de A^p.

Exercice 2 (eml 2013)

Partie I

1)Soit $i \in [\![1, n]\!]$. L'expérience aléatoire est constituée de k épreuves successives, identiques et indépendantes.
A chaque épreuve, la probabilité de succès (tirer la boule i) vaut $1/n$.
X_i compte le nombre de succès.
Ainsi, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(k, 1/n)$.

On a donc $X_i(\Omega) = [\![0, k]\!]$ et $\forall j \in [\![0, k]\!],\ P(X_i = j) = \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \left(\frac{1}{n}\right)^j \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-j}$.

Le cours donne :
$E(X_i) = k \times \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$ et $V(X_i) = k \times \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

2)L'événement $((X_1 = k) \cap (X_2 = k))$ est impossible car on ne peut pas en effectuant k tirages obtenir k fois la boule 1 et k fois la boule 2.
Donc $P\left((X_1 = k) \cap (X_2 = k)\right) = 0$.

Par ailleurs, $P(X_1 = k) = P(X_2 = k) = \left(\frac{1}{n}\right)^k$.

Donc $P\left((X_1 = k) \cap (X_2 = k)\right) \neq P(X_1 = k)P(X_2 = k)$, ce qui prouve que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

A-fortiori, X_1, X_2, ..., X_n ne sont pas indépendantes (mutuellement).

3)a)Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

L'expérience aléatoire est constituée de k épreuves successives, identiques et indépendantes.

A chaque épreuve, la probabilité de succès (tirer la boule i ou la boule j) vaut $2/n$.
$X_i + X_j$ compte le nombre de boules i ou j tirées, soit le nombre de succès.
Ainsi, $X_i + X_j \hookrightarrow \mathscr{B}(k, 2/n)$.

Le cours donne :
$V(X_i + X_j) = k \times \frac{2}{n} \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right)$.

c)De la formule : $V(X_i + X_j) = V(X_i) + V(X_j) + 2cov(X_i, X_j)$, on tire :

$$\begin{aligned} cov(X_i, X_j) &= \frac{1}{2}\left(V(X_i + X_j) - V(X_i) - V(X_j)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \frac{2k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\frac{k}{n^2}. \end{aligned}$$

Partie II

1)Z_1 est le nombre de numéros différents obtenus lors de 1 tirage.
$Z_1(\Omega) = \{1\}$ et $P(Z_1 = 1) = 1$. C'est une loi certaine.
On déduit : $E(Z_1) = 1$.

En effectuant 2 tirages, on peut avoir :
– soit deux numéros différents, ce qui donne $Z_2 = 2$,
– soit deux numéros identiques, ce qui donne $Z_2 = 1$.
Ainsi, $Z_2(\Omega) = \{1, 2\}$.

Calculons $P(Z_2 = 1)$. Sur deux tirages, il y a n^2 couples de boules possibles. Parmi ces couples, n d'entre eux réalisent l'événement $(Z_2 = 1)$, ce sont les couples $(1, 1)$, ..., (n, n).
D'après la formule d'équiprobabilité : $P(Z_2 = 1) = \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$.
On déduit : $P(Z_2 = 2) = 1 - P(Z_2 = 1) = 1 - \dfrac{1}{n}$.
D'où $E(Z_2) = 1 \times P(Z_2 = 1) + 2 \times P(Z_2 = 2) = \dfrac{1}{n} + 2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 2 - \dfrac{1}{n}$.

2)Soit $k \in \mathbf{N}^*$.

a)Sur k tirages, il y a n^k k-uplets de boules possibles.
Parmi ces k-uplets, n d'entre eux réalisent l'événement $(Z_k = 1)$, ce sont les k-uplets $(1, ..., 1)$, ..., $(n, ..., n)$.
D'après la formule d'équiprobabilité : $P(Z_k = 1) = \dfrac{n}{n^k} = \dfrac{1}{n^{k-1}}$.

b)Remarquons d'abord que si $k > n$, l'événement $(Z_k = k)$ est impossible car on ne peut pas tirer k numéros différents, alors qu'on ne dispose que de n numéros possibles.

Prenons maintenant $k \in [\![1, n]\!]$.
Sur k tirages, il y a toujours n^k $k - uplets$ de boules possibles.
Les k-uplets réalisant l'événement $(Z_k = k)$ doivent porter des numéros distincts deux à deux.

On peut commencer par choisir k numéros parmi n, il y a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ choix, puis permuter ces k numéros au choix de façon à former un k-uplet, ce qu'on peut faire de $k!$ façons.

Le nb de cas favorables est donc $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times k! = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \times k! = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

$$\text{Ainsi, } P(Z_k = k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!n^k} & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

c)Soit $l \in [\![1, n]\!]$.
La formule des probabilités totales pour le s.c.e $(Z_k = i)_{1 \leq i \leq n}$ donne :

$$P(Z_{k+1} = l) = \sum_{i=1}^{n} P_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = l)P(Z_k = i).$$

Calculons les probabilités conditionnelles.
Supposons donc $(Z_k = i)$ réalisé. Cela signifie que les k premiers tirages ont amené i numéros distincts.
Pour réaliser l'événement $(Z_{k+1} = l)$, on doit avoir :
– $l \geq i$, puisque avec un tirage de plus (le $k+1$-ème), le nombre de numéros distincts ne peut pas diminuer,
– $l \leq i+1$, puisqu'un tirage de plus ne peut pas apporter plus d'un numéro nouveau.

Ainsi, les probabilités conditionnelles sont toutes nulles, sauf celles dont l'indice i vérifie $i \leq l \leq i+1$, c'est-à-dire pour $i = l$ et $i = l-1$.

On déduit :

$$P(Z_{k+1} = l) = P_{(Z_k=l)}(Z_{k+1} = l)P(Z_k = l) + P_{(Z_k=l-1)}(Z_{k+1} = l)P(Z_k = l-1).$$

Calculons enfin les deux probabilités conditionnelles restantes.

Supposons l'événement $(Z_k = l)$ réalisé. L'événement $(Z_{k+1} = l)$ se réalise si et seulement si le $k+1$-ème tirage n'apporte pas de numéro nouveau, ce doit donc être un des l numéros obtenus lors des k premiers tirages.
Donc $P_{(Z_k=l)}(Z_{k+1} = l) = \dfrac{l}{n}$.
Supposons l'événement $(Z_k = l-1)$ réalisé. L'événement $(Z_{k+1} = l)$ se réalise si et seulement si le $k+1$-ème tirage apporte un numéro nouveau, ce doit donc être un des $n-(l-1)$ numéros non obtenus lors des k premiers tirages.
Donc $P_{(Z_k=l-1)}(Z_{k+1} = l) = \dfrac{n-(l-1)}{n} = \dfrac{n-l+1}{n}$.
On déduit finalement :

$$P(Z_{k+1} = l) = \frac{l}{n}P(Z_k = l) + \frac{n-l+1}{n}P(Z_k = l-1).$$

> Remarque
> Pour tout entier k non nul, on a : $Z_k(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.
> Plus précisément, $Z_k(\Omega) = [\![1, min(k, n)]\!]$ du fait que Z_k ne peut ni dépasser n, ni dépasser k.

d)En multipliant membre à membre 2)c), puis en sommant, on obtient :

$$\sum_{l=1}^{n} lP(Z_{k+1} = l) = \sum_{l=1}^{n} l\left(\frac{l}{n}P(Z_k = l) + \frac{n-l+1}{n}P(Z_k = l-1)\right).$$

Puis, par linéarité de la somme :

$$E\left(Z_{k+1}\right)=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} l^2 P(Z_k=l)+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} l(n-l+1)P(Z_k=l-1) \quad (*)$$

Réécrivons la somme de droite en posant $j=l-1$:

$$\sum_{l=1}^{n} l(n-l+1)P(Z_k=l-1)$$
$$=\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)(n-j)P(Z_k=j).$$
$$=n\underbrace{P(Z_k=0)}_{=0}+\sum_{j=1}^{n}(j+1)(n-j)P(Z_k=j)-\underbrace{(n+1)(n-n)P(Z_k=n)}_{=0}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}(j+1)(n-j)P(Z_k=j).$$

En injectant dans $(*)$ et en renommant j en l, on tire :

$$\begin{aligned}
E\left(Z_{k+1}\right)&=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} l^2 P(Z_k=l)+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(l+1)(n-l)P(Z_k=l)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left[l^2+(l+1)(n-l)\right]P(Z_k=l)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left[l^2+ln-l^2+n-l\right]P(Z_k=l)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left[(n-1)l+n\right]P(Z_k=l)\\
&=\frac{n-1}{n}\sum_{l=1}^{n} lP(Z_k=l)+\sum_{l=1}^{n}P(Z_k=l)\\
&=\frac{n-1}{n}E(Z_k)+1.
\end{aligned}$$

3)a)Pour tout entier $k\geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{k+1}&=E(Z_{k+1})-n\\
&=\frac{n-1}{n}E(Z_k)+1-n\\
&=\frac{n-1}{n}\left(v_k+n\right)+1-n\\
&=\frac{n-1}{n}v_k.
\end{aligned}$$

Donc la suite $(v_k)_{k\geq 1}$ est géométrique de raison $\dfrac{n-1}{n}$.

b)On déduit pour tout entier $k \geq 1$:

$v_k = v_1 \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}$ avec $v_1 = E(Z_1) - n = 1 - n$

D'où $E(Z_k) = v_k + n$

$$\begin{aligned} &= (1-n)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} + n \\ &= (1-n) \times \frac{n}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k} + n \\ &= -n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k} + n \\ &= n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k}\right). \end{aligned}$$

Partie III

1)La question II.2)a) donne : $P(Z_k = 1) = \dfrac{1}{n^{k-1}}$.

Comme ici $n = 4$, on obtient : $P(Z_k = 1) = \dfrac{1}{4^{k-1}}$.

L'urne ne contenant que 4 boules numérotées 1,2,3,4, il est impossible de réaliser l'événement $(Z_k \geq 5)$ puisque cela imposerait d'obtenir au moins 5 numéros distincts. Donc $P((Z_k \geq 5) = 0$.

2)Effectuer k tirages avec remise d'une boule dans l'urne revient à construire une application de l'ensemble E des k tirages dans l'ensemble F des 4 boules. Il y a 4^k telles applications.

L'événement $(Z_k = 2)$ se réalise si et seulement si ces k tirages amènent deux numéros différents.

On commence par choisir ces 2 numéros parmi les 4 possibles, ce qui fait $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ possibilités.

Ces 2 numéros étant choisis, on construit une application de E vers l'ensemble formé de ces 2 numéros, ce qui donne 2^k applications possibles, auxquelles il faut retrancher les 2 applications qui envoient les éléments de E vers le même numéro. Donc $Card(Z_k = 2) = 6\left(2^k - 2\right)$.

Ainsi, $P(Z_k = 2) = \dfrac{6\left(2^k - 2\right)}{4^k}$.

3)a)L'événement $(Z_k \leq 3)$ se réalise si les k tirages amènent au plus 3 numéros distincts, ce qui se produit si et seulement si l'un au moins des numéros 1, 2, 3 ou 4 n'a pas été obtenu.

Ainsi, $(Z_k \leq 3) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

Donc $P(Z_k \leq 3) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$.

On calcule cette probabilité par la formule du crible en remarquant que pour chacune des 3 sommes, les probabilités sont identiques pour des raisons évidentes de symétrie. Calculons le nombre de termes de chaque somme.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{4} P(A_i)$ a 4 termes.

$\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq 4} P(A_i \cap A_j)$ a 6 termes car $\binom{4}{2}$ couples d'indices possibles.

$\displaystyle\sum_{1\leq i<j<k\leq 4} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ a 4 termes car $\binom{4}{3}$ triplets d'indices possibles.

Enfin, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$ car impossible de n'obtenir aucun numéro.

On déduit finalement :

$$P(Zk \leq 3) = 4P(A_1) - 6P(A_1 \cap A_2) + 4P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

b)A_1 se réalise si et seulement si la boule n° 1 ne sort à aucun des k tirages.
Il y a 3^k applications de l'ensemble E des k tirages dans l'ensemble des boules numérotées 2,3,4.

Donc $Card(A_1) = 3^k$. D'où $P(A_1) = \dfrac{3^k}{4^k}$.

$A_1 \cap A_2$ se réalise si et seulement si les boules numérotées 1 et 2 ne sortent à aucun des k tirages.
Il y a 2^k applications de l'ensemble E des k tirages dans l'ensemble des boules numérotées 3 et 4.

Donc $Card(A_1 \cap A_2) = 2^k$. D'où $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{2^k}{4^k}$.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ se réalise si et seulement si les boules numérotées 1,2 et 3 ne sortent à aucun des k tirages, c'est-à-dire si et seulement si la boule numéro 4 sort à chacun des k tirages.
Il y a qu'une seule application de l'ensemble E des k tirages dans l'ensemble constitué de l'unique boule numéro 4.

Donc $Card(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1$. D'où $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \dfrac{1}{4^k}$.

c)De la question III.3)a), on déduit :

$P(Z_k \leq 3) = 4 \times \dfrac{3^k}{4^k} - 6 \times \dfrac{2^k}{4^k} + 4 \times \dfrac{1}{4^k} = \dfrac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k}$.

De l'égalité $P(Z_k \leq 3) = P(Z_k = 1) + P(Z_k = 2) + P(Z_k = 3)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
P(Z_k = 3) &= P(Z_k \leq 3) - P(Z_k = 1) - P(Z_k = 2) \\
&= \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} - \frac{4}{4^k} - \frac{6\left(2^k - 2\right)}{4^k} \\
&= \frac{4 \times 3^k - 12 \times 2^k + 12}{4^k}.
\end{aligned}$$

Enfin, $P(Z_k = 4) = 1 - P(Z_k \leq 3) = 1 - \dfrac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k}$.

Exercice 3

Partie A

1)$\forall x \in \mathbf{R},\ sh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -sh(x)$.
Donc sh est impaire.

$\forall x \in \mathbf{R},\ ch(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = ch(x)$.
Donc ch est paire.

2)a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t} = +\infty$. Par composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.
Par différence, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{x} - e^{-x}\right) = -\infty$. D'où, $\lim\limits_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty$.

sh étant impaire, on déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty$.

b)a)$x \mapsto e^{x}$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables sur $\mathbf{R}$.
Par composée, $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Par différence, $x \mapsto e^{x} - e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Par quotient, sh est dérivable sur $\mathbf{R}$.

$\forall x \in \mathbf{R},\ sh'(x) = \dfrac{e^{x} - \left(-e^{-x}\right)}{2} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = ch(x)$.

c)$\forall x \in \mathbf{R},\ sh'(x) = ch(x) > 0$. Donc sh est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$sh(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

d)On remarque que $sh(0) = 0$. Par ailleurs, sh est strictement croissante.
On déduit que $\forall x > 0,\ sh(x) > 0$ et $\forall x < 0,\ sh(x) < 0$.

e)sh est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ comme différence, quotient et composée de fonctions de classe C^2.

De plus, $sh''(x) = ch'(x) = sh(x)$.

Donc $\forall x \geq 0,\ sh''(x) \geq 0$ et $\forall x \leq 0,\ sh''(x) \leq 0$.

Ainsi, sh est concave sur $]-\infty, 0]$, puis convexe sur $[0, +\infty[$.

3)a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t} = +\infty$. Par composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.
Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{x} + e^{-x}\right) = +\infty$. D'où, $\lim\limits_{x\to-\infty} ch(x) = +\infty$.

ch étant paire, on déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} ch(x) = +\infty$.

b)a)$x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables sur $\mathbf{R}$.
Par composée, $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Par somme, $x \mapsto e^x + e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Par quotient, ch est dérivable sur $\mathbf{R}$.

$\forall x \in \mathbf{R},\ ch'(x) = \dfrac{e^x + \left(-e^{-x}\right)}{2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$.

c)$\forall x \in \mathbf{R},\ ch'(x) = sh(x)$. La question 2)d) donne alors le signe de $sh(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'(x)$		$-$	0	$+$	
$ch(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Le tableau de variations de ch donne alors : $\forall x \in \mathbf{R}^*,\ ch(x) > 1$.

d)ch est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ comme différence, quotient et composée de fonctions de classe C^2.

De plus, $ch''(x) = sh'(x) = ch(x) > 0$. Donc ch est convexe sur $\mathbf{R}$.

4)a)$\forall x \in \mathbf{R},\ ch(x) - sh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x} > 0$.
Donc $\forall x \in \mathbf{R},\ ch(x) > sh(x)$.

b)Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}
\left(ch(x)\right)^2 - \left(sh(x)\right)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2}{4} \\
&= \frac{\left(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right)}{4} \\
&= \frac{4e^x e^{-x}}{4} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbf{R},\ \left(ch(x)\right)^2 = 1 + \left(sh(x)\right)^2$.

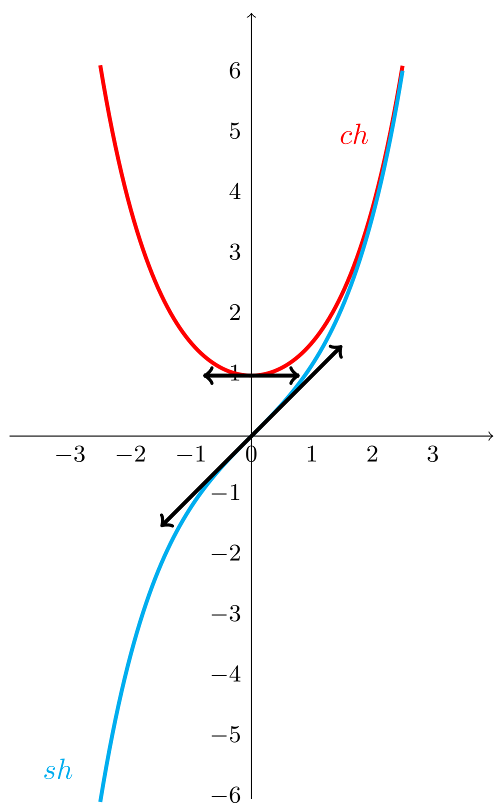
c)On étudie sur $[0, +\infty[$ la fonction auxiliaire $\varphi : x \mapsto sh(x) - x$.

φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme différence de fonctions dérivables.
$\forall x \geq 0,\ \varphi'(x) = ch(x) - 1 \geq 0$ d'après 3)c).
Donc φ est croissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $\varphi(0) = 0$.
Cela entraîne que $\forall x \geq 0,\ \varphi(x) \geq 0$.

Ainsi, $\forall x \geq 0,\ sh(x) \geq x$.

Remarque
On peut aussi évoquer que la tangente à la courbe représentative de sh en zéro a pour équation $y = sh'(0)(x-0) + sh(0)$, c'est-à-dire $y = x$.
Comme sh est convexe sur $[0, +\infty[$, elle est au-dessus de ses tangentes sur $[0, +\infty[$ donc au-dessus de la droite $y = x$, d'où le résultat.
On peut aussi retouver cette inégalité en appliquant l'inégalité des accroissements finis.

d)



Comme déjà vu dans la remarque précédente, la tangente à la courbe représentative de sh est la droite d'équation $y = x$.
Cette tangente traverse la courbe car (0,0) est un point d'inflexion de la courbe.
En ce qui concerne la courbe représentative de ch, la tangente est horizontale puisque ch présente un minimum en zéro.
On peut remarquer enfin que sh et ch ont une croissance exponentielle en $+\infty$ car $sh(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$ et $ch(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$.

Partie B

5)a)sh est dérivable en 0. Elle admet donc un DL en 0 à l'ordre 1 :
$sh(x) \underset{0}{=} sh(0) + sh'(0)x + o(x)$.

Avec $sh(0) = 0$ et $sh'(0) = ch(0) = 1$.

D'où, $sh(x) \underset{0}{=} x + o(x)$.

b)ch est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$. Elle admet donc un DL en 0 à l'ordre 2 :

$ch(x) \underset{0}{=} ch(0) + ch'(0)x + \dfrac{ch''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$.

Avec $ch(0) = 1$, $ch'(0) = sh(0) = 0$ et $ch''(0) = ch(0) = 1$.

D'où, $ch(x) \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

6)a)La question 5)a) donne : $sh(x) \underset{0}{\sim} x$, puis $xsh(x) \underset{0}{\sim} x^2$

La question 5)b) donne : $ch(x) - 1 \underset{0}{=} \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ d'où $ch(x) - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

Par quotient d'équivalents, on déduit : $\dfrac{xsh(x)}{ch(x) - 1} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{\frac{x^2}{2}}$.

C'est-à-dire : $f(x) \underset{0}{\sim} 2$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$.

Or, $f(0) = 2$. On a donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

Ainsi, f est continue à droite en 0.

b)f est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit, quotient et différence de fonctions continues. De plus, f est continue à droite en 0.
Donc f est continue sur $[0, +\infty[$.

7)a)f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit, quotient et différence de fonctions dérivables.

Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\big(sh(x) + xch(x)\big)\big(ch(x) - 1\big) - sh(x) \times xsh(x)}{\big(ch(x) - 1\big)^2} \\
&= \frac{sh(x)\big(ch(x) - 1\big) + xch(x)\big(ch(x) - 1\big) - x\big(sh(x)\big)^2}{\big(ch(x) - 1\big)^2} \\
&= \frac{sh(x)\big(ch(x) - 1\big) + x\big(ch(x)\big)^2 - xch(x) - x\big(sh(x)\big)^2}{\big(ch(x) - 1\big)^2} \\
&= \frac{sh(x)\big(ch(x) - 1\big) + x\left[\big(ch(x)\big)^2 - \big(sh(x)\big)^2\right] - xch(x)}{\big(ch(x) - 1\big)^2}.
\end{aligned}$$

Or, $\big(ch(x)\big)^2 - \big(sh(x)\big)^2 = 1$ d'après la question 4)b).

$$\begin{aligned}\text{Donc } f'(x) &= \frac{sh(x)\big(ch(x)-1\big)+x\big(1-ch(x)\big)}{\big(ch(x)-1\big)^2}\\ &= \frac{\big(sh(x)-x\big)\big(ch(x)-1\big)}{\big(ch(x)-1\big)^2}\\ &= \frac{sh(x)-x}{ch(x)-1}.\end{aligned}$$

b)Pour tout $x>0$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{sh(x)}{ch(x)-1} = \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}-2}.$$

En factorisant haut et bas par e^x, puis en simplifiant, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}-2e^{-x}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=1$.

Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, on déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c)On a vu dans la partie A que $\forall x>0,\ sh(x)\geq x$ et $ch(x)>1$.

Donc $\forall x>0,\ f'(x)\geq 0$, ce qui prouve que f est croissante sur $]0,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	2 $\nearrow$	$+\infty$

d)Pour tout $x>0$, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{xsh(x)}{ch(x)-1}-2}{x} = \frac{xsh(x)-2\big(ch(x)-1\big)}{x\big(ch(x)-1\big)}.$$

En utilisant l'indication donnée, on a :

$$\begin{aligned} xsh(x)-2\big(ch(x)-1\big) &\underset{0}{=} x\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-2\left(\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\\ &\underset{0}{=} x^2+\frac{x^4}{6}+xo(x^3)-x^2-2o(x^3)\\ &\underset{0}{=} \frac{x^4}{6}+xo(x^3)-2o(x^3)\\ &= \frac{x^4}{6}+x\times x^3\epsilon_1(x)-2x^3\epsilon_2(x)\\ &= x^3\left(\frac{x}{6}+\epsilon_1(x)-2\epsilon_2(x)\right).\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to0}\epsilon_1(x)=\lim\limits_{x\to0}\epsilon_2(x)=0.$.

De même, $x\big(ch(x)-1\big) = x\left(\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right)$
$$= \frac{x^3}{2} + xo(x^3)$$
$$= \frac{x^3}{2} + x \times x^3\epsilon_3(x)$$
$$= x^3\left(\frac{1}{2} + x\epsilon_3(x)\right)$$
avec $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon_3(x) = 0$.

On déduit : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\dfrac{x}{6}+\epsilon_1(x)-2\epsilon_2(x)}{\dfrac{1}{2}+x\epsilon_3(x)}$, puis $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$.

Cette limite est finie donc f est dérivable à droite en 0. De plus $f'_d(0) = 0$.

8)a)Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{xsh(x)}{ch(x)-1} - x \\ &= x\left(\frac{sh(x)}{ch(x)-1} - 1\right) \\ &= x \times \frac{sh(x)-ch(x)+1}{ch(x)-1} \\ &= x \times \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2} - \frac{e^x+e^{-x}}{2} + 1}{\frac{e^x+e^{-x}}{2} - 1} \\ &= x \times \frac{2(1-e^{-x})}{e^x+e^{-x}-2} \\ &= \frac{2x}{e^x} \times \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-2x}-2e^{-x}}. \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-2x}-2e^{-x}} = 1$.

Donc $f(x) - x \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{e^x}$.

b)Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{e^x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x)-x\big) = 0$.

La droite d'équation $y = x$ est donc asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

9)a)g est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ comme produit et somme de fonctions de classe C^2.

Pour tout $x \geq 0$, on a :

$g'(x) = (sh(x) + xch(x)) - 2sh(x) = xch(x) - sh(x)$.

Puis, $g''(x) = (ch(x) + xsh(x)) - ch(x) = xsh(x)$.

b)$\forall x \geq 0,\ sh(x) \geq 0$ donc $\forall x \geq 0,\ g''(x) \geq 0$.
g' est donc croissante sur $[0, +\infty[$.

En outre, $g'(0) = -sh(0) = 0$. Donc $\forall x \geq 0,\ g'(x) \geq 0$.

c)g est donc croissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $g(0) = 2 - 2ch(0) = 2 - 2 = 0$.
Donc $\forall x \geq 0,\ g(x) \geq 0$.

d)Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{sh(x) - x}{ch(x) - 1}\right)' \quad \text{voir question 7)a)} \\
&= \frac{\big(ch(x) - 1\big)\big(ch(x) - 1\big) - sh(x)\big(sh(x) - x\big)}{\big(ch(x) - 1\big)^2} \\
&= \frac{\big(ch(x)\big)^2 - 2ch(x) + 1 - \big(sh(x)\big)^2 + xsh(x)}{\big(ch(x) - 1\big)^2} \\
&= \frac{-2ch(x) + 2 + xsh(x)}{\big(ch(x) - 1\big)^2} \quad \text{grâce à 4)b)} \\
&= \frac{g(x)}{\big(ch(x) - 1\big)^2}.
\end{aligned}$$

On a vu que $\forall x \geq 0,\ g(x) \geq 0$. De plus, $\big(ch(x) - 1\big)^2 \geq 0$.
Donc $\forall x > 0,\ f''(x) \geq 0$, ce qui prouve que f est convexe.

10)