

# RAPPORT D'ÉPREUVE

## Remarques globales

Avec une moyenne de 11,48 et un écart-type de 5,44, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

## Forme

Le soin apporté à la présentation de la copie afin de la rendre lisible par le correcteur est un élément qui est pris en compte dans l'évaluation du travail du candidat. Pour une majorité des candidats, cet aspect semble bien compris et ainsi leur copie est lisible, aérée, voire même agréable à corriger. Cependant il reste quelques candidats dans une proportion non négligeable malheureusement, pour lesquels la copie est illisible soit par le manque de soin apporté à la présentation globale, soit par la présence trop importante de ratures, soit par un graphisme indéchiffrable empêchant la distinction des lettres, soit par le non-respect de la numérotation des exercices et des questions.

Un manque de soin également dans l'écriture des objets mathématiques est à noter et de plus en plus fréquent. En plus d'être en général incorrect ou ne traduisant clairement pas la pensée du candidat, il est souvent source d'erreur dans le raisonnement mené. Par exemple ce manque de rigueur se retrouve dans l'écriture des sous-espaces vectoriels, de la négligeabilité, ou encore dans l'oubli presque systématique de la différentielle  $dt$  dans les intégrales, dans l'oubli fréquent de parenthèses dans les calculs algébriques : par exemple  $a(b+c)$  est fautivement écrit  $a b + c$  mais correctement perçu comme  $a(b+c)$  ou encore dans la disposition des barres de fraction en cascade gravement fausse.

## Fond

Une bonne connaissance des notions et des résultats fondamentaux du cours est indispensable pour répondre aux différents exercices.

En général le vocabulaire du cours est mal connu donc mal employé, beaucoup de confusions entre les différentes notions figurent dans les copies : l'ordre ou la taille d'une matrice carrée n'est pas son rang (la dimension d'une matrice n'a pas de sens), le rang d'une famille de vecteurs au lieu de nombre d'éléments de cette famille (la dimension d'une famille de vecteurs n'a pas de sens) ; des vecteurs libres ne remplacent pas une famille libre de vecteurs ; une intégrale impropre convergente n'est pas toujours une intégrale faussement impropre ; en probabilité, les lancers ne sont pas incompatibles.

De même les candidats ont une certaine tendance à assimiler un événement et sa probabilité : ainsi des réunions de nombres réels ou des additions d'événements sont rencontrées. Une rédaction correcte avec les justifications nécessaires (par vérification, calcul ou rappel des hypothèses pour appliquer tel théorème utilisé) est indispensable pour se voir attribués tous les points de la question. Les « entourloupes » pour arriver à obtenir coûte que coûte un résultat donné dans le sujet ne trompent personne et sont sévèrement sanctionnés.

Les réponses aux questions en informatique ont montré que les syntaxes correctes ne sont pas maîtrisées.

Enfin, beaucoup de maladresses et de lacunes dans la gestion des calculs sont à noter. Les inégalités sont mal maîtrisées : de très nombreuses confusions entre les inégalités larges et strictes ; pas assez de rigueur dans la

gestion des signes (multiplier par une quantité négative sans changer le sens de l'inégalité, multiplier deux inégalités membre à membre sans contrôler que tous les termes sont positifs, ...).

## Remarques question par question

### Exercice 1

#### Partie A : Exemples de matrices appartenant à $\mathcal{A}$ .

1. Dans la résolution de cette question, certains automatismes apparaissent et montrent un manque de réflexion face aux questions posées. Ainsi de nombreux candidats pensent que  $AB = 0$  implique  $A = 0$  ou  $B = 0$  quand  $A$  et  $B$  sont des matrices, ou encore d'autres candidats développent  $(\alpha + 1)(\alpha + 2)$  avant d'en calculer le discriminant pour en trouver les racines!
2. De trop nombreux candidats pensent que  $\mathcal{A}$  est un espace vectoriel et le prouvent à coup d'affirmations non justifiées. Quelques uns peinent à prouver la stabilité par combinaison linéaire (ce qui est normal, car il n'y a pas stabilité) mais ils ne mettent pas alors en défaut l'affirmation qu'ils tentent de prouver. Un temps d'analyse de l'énoncé n'est pas du temps perdu quand il permet d'établir une stratégie de résolution.  
 Des confusions apparaissent aussi à cette question entre la stabilité par combinaison linéaire et la linéarité d'une application.
3. (a) Cette question demandant un calcul matriciel est en très grande majorité très bien traitée. Cependant quelques rares candidats ne savent pas effectuer le produit matriciel demandé et trouvent que  $BX_1$  est une matrice carrée d'ordre 3.  
 (b) Cette question est globalement assez bien traitée, mais avec une rédaction bien trop imprécise quant à la justification des égalités ou des implications.  
 Il est cependant regrettable que certains candidats n'utilisent pas la question précédente, mais déterminent les valeurs propres et les sous-espaces propres à partir de la résolution d'un système long et pénible.  
 La vérification de la non(nullité du vecteur pour prouver l'existence d'une valeur propre n'est pas systématique, c'est dommage. De même l'égalité  $BX_1 = -X_1$  ne permet pas d'affirmer directement que  $(X_1)$  constitue une base du sous-espace propre associé à la valeur propre  $-1$ .  
 La détermination du spectre de  $B$  demande un petit travail. Seule une inclusion résulte de la question précédente.  $0$  n'est pas toujours une valeur propre d'une matrice donnée. C'est en particulier le cas ici. Contrairement à ce qui est affirmé par certains candidats,  $0$  n'est en effet pas une valeur propre de  $B$  et ces candidats auraient dû réagir quand ils aboutissent à la conclusion que le seul vecteur associé à la valeur propre  $0$  est le vecteur nul.  
 (c) Cette question est souvent bien traitée.  
 Cependant, la justification de l'inversibilité de  $P$  est à soigner, mais ne nécessite pas le calcul de  $P^{-1}$  qui fait perdre beaucoup de temps aux candidats qui se lancent dans ce calcul.  
 La justification de la diagonalisabilité de  $B$  est rarement correcte :  $B$  n'est pas symétrique ici, donc cet argument ne peut pas être valable; certains utilisent l'argument  $\dim(B) = \dim(E) = 3$ , qui est doublement incorrect : le terme « dimension de  $B$  » n'a pas de sens et  $E$  est un espace vectoriel de dimension 9.

- (d) En grande majorité, les candidats ont choisi de résoudre cette question par le calcul en effectuant les produits matriciels définissant les éléments de  $\mathcal{A}$ .

Quelques-uns affirment sans aucune preuve que « puisque  $B$  et  $D$  sont semblables, si  $D \in \mathcal{A}$ , alors  $B \in \mathcal{A}$  » ; aucun résultat du cours ne permet de l'affirmer, une preuve détaillée était attendue.

4. Cette question est très peu traitée.

Les quelques candidats qui l'ont tentée ne l'ont pas comprise : ils ont confondu les hypothèses et la conclusion et n'ont pas réussi à distinguer cette question de la suivante.

**Partie B : Diagonalisabilité des matrices de  $\mathcal{A}$ .**

5. Cette question est en général bien traitée. Cependant les candidats perdent du temps en développant l'expression (\*) pour trouver un polynôme annulateur, dont ils cherchent ensuite les racines. Il serait plus efficace de reconnaître directement la forme factorisée. Rappelons cependant que  $M^3 + 3M^2 + 2M$  n'est pas un polynôme ni  $X^3 + 3X^2 + 2X = 0$ , ni même  $X^3 + 3I_3X^2 + 2I_3X$ .

Certains candidats se contentent de vérifier que 0, -1 et -2 sont des racines de  $P$  sans préciser qu'il n'y en a pas d'autre.

6. Cette question est en général bien comprise et traitée.

Attention, la dimension d'une matrice est un terme impropre. Et le rang de la matrice importe peu ici, il semble être souvent confondu avec la taille de cette dernière.

7. (a) Cette question n'est en général traitée que partiellement, la dernière déduction a posé de nombreux problèmes.

Comme à la question 1., certains candidats affirment que si le produit de plusieurs matrices est nul, alors au moins l'une de ces matrices est nulle.

D'autres ont supposé que  $M$  était diagonalisable. D'autres encore ont collé ici le raisonnement indiquant qu'une matrice diagonalisable admettant une seule valeur propre est une homothétie.

Rappelons enfin que la somme de deux matrices inversibles n'est pas toujours une matrice inversible, qu'il existe des matrices non nulles et non inversibles, ainsi que l'implication «  $M$  est non nulle donc inversible » est fautive, ainsi que sa contraposée.

- (b) Cette question est peu abordée.

Une analyse correcte du sujet a permis à certains candidats de répondre avec efficacité et exactitude à cette question, une simple analogie avec la question précédente était à mettre en évidence.

8. La contradiction a été très peu écrite car non comprise.

Beaucoup prouvent en partant de l'hypothèse que  $M$  n'admet pas de valeur propre, que le spectre de  $M$  est vide. Certains pensent que si  $M$  n'a pas de valeurs propre, alors elle n'admet pas de polynôme annulateur.

9. (a) Cette question a mis en défaut les candidats qui peinent à distinguer endomorphisme et matrice, ou qui ont du mal à lier ces notions.

Ainsi la confusion entre endomorphisme et matrice aboutit à des écritures du type «  $(f + Id) \circ (f + 2id) = (M + I)(M + 2I)$  ». La démonstration de la commutativité est rarement faite. La justification de l'implication  $f \circ (f + Id) \circ (f + 2id) = 0 \implies (f + Id) \circ (f + 2id) = 0$  est très peu justifiée et quand elle l'est, utilise l'argument  $f \neq 0$ .

De nombreux candidats utilisent la « propriété » :  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (X - \lambda)$  est annulateur de  $M$ .

- (b) Cette question est traitée par une moitié des candidats, semble avoir été comprise par certains mais toujours très mal rédigée.  
 Pour de nombreux candidats,  $(f + Id) \in \text{Ker}(f + 2Id)$ . Cet argument leur permet de conclure que  $\text{Ker}(f + 2Id) = \emptyset$  ou directement  $\dim(\text{Ker}(f + 2Id)) \geq 1$ . Une confusion entre l'ensemble vide et  $\{0\}$  est très répandue.  
 Certains candidats ont tenté d'invoquer le théorème du rang.
- (c) Cette question est peu abordée, mais quand elle l'est, elle est mieux réussie que la précédente.
- (d) i. Beaucoup ont pris des valeurs particulières pour  $u$  et  $v$ , et très souvent reviennent à la matrice  $B$ .  
 Pour certains, comme  $u$  et  $v$  sont des vecteurs non nuls, alors la famille  $(u, v)$  est libre. Beaucoup affirment que la concaténation de familles libres est encore libre. Le fait que  $u$  et  $v$  soient associés à des valeurs propres *distinctes* n'est pas mentionné.
- ii. Cette question est souvent mal traitée.  
 Des confusions entre cardinal, dimension apparaissent à nouveau à cette question.  
 La rédaction suivante et fréquemment rencontrée : «  $w$  n'est pas dans  $\text{Vect}(u, v)$  donc la famille  $(u, v, w)$  est libre » attend un peu plus de justifications ou d'explications.
- iii. Cette question est très peu traitée.  
 La composition d'applications est peu maîtrisée, l'écriture suivante  $(f + Id)(w) \circ (f + 2id)(w) = 0$  est souvent rencontrée et n'a pas de sens.
10. Cette question est très rarement abordée.  
 Le travail de synthèse à faire demandait du temps et une bonne maîtrise des règles logiques, que beaucoup de candidats n'ont pas clairement en tête.

## Exercice 2

### Partie A

1. (a) Cette question est souvent abordée et en général bien faite.  
 Quelques erreurs sont cependant assez régulièrement rencontrées :  
 « Comme  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t)}{1 + t^n} = -\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \ln(t) = -\infty$  alors  $\frac{\ln t}{1 + t^n} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t$  », ou encore «  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t)}{1 + t^n} = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(t)$  » ou encore «  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t)}{1 + t^n} = \ln(t)$  ».
- (b) La primitive usuelle de  $x \mapsto \ln(x)$  est souvent connue.  
 De nombreux candidats réécrivent une autre intégrale partielle avec une lettre différente que celle proposée dans l'énoncé pour prouver la convergence !  
 La croissance comparée n'est pas toujours mentionnée. Un certain nombre de candidats ne voit pas de problème à écrire «  $\ln(0)$  » pour conclure sur la convergence de l'intégrale !
- (c) Le critère d'équivalence n'est pas correctement acquis, en particulier la continuité n'est jamais vérifiée et beaucoup pensent que l'intégrande est positive quand ils pensent à regarder son signe.  
 Certains affirment à partir de la question 1.(a) que  $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1 + t^n} dt \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \int_0^1 \ln(t) dt$ , et qui de plus concluent sur la valeur de l'intégrale  $J_n$ .
2. (a) Les résolutions proposées sont dans l'ensemble décevantes.  
 Pour certains la limite demandée vaut  $+\infty$ .  
 Les équivalences sont souvent très mal manipulées.

- (b) En grande majorité les candidats ne parviennent pas à traduire la limite de la question précédente sous la forme d'une négligeabilité.

L'intégrale de Riemann n'est pas toujours reconnue, et le candidat se lance parfois dans son calcul pour justifier sa convergence. Et quand elle est reconnue, l'argumentation est incomplète : l'intégrale converge « par critère de Riemann », sans en vérifier les hypothèses.

Plusieurs candidats affirment que si l'intégrande admet une limite finie en  $+\infty$ , alors l'intégrale impropre en  $+\infty$  converge.

De manière générale un grand manque de rigueur est à déplorer dans l'utilisation du critère de comparaison des intégrales impropres de fonctions continues positives. Les hypothèses du théorème ne sont que très rarement contrôlées.

3. Cette question est plutôt assez bien traitée par les candidats. Quelques confusions de vocabulaire sont à noter cependant entre « l'intégrale qui définit  $I_n$  converge » et « la suite  $(I_n)$  converge ».

## Partie B

4. (a) De nombreux candidats se lancent dans une étude de fonctions, mais n'aboutissent pas ou « passent en force » en conclusions abusives, avec des études de signes non menées ou mal menées. En particulier, plusieurs candidats justifient la réponse par un calcul de limite (soit en 0, soit en 1) ou par une comparaison de fonctions au voisinage de 0.

Peu pensent à réduire au même dénominateur l'expression au centre de l'inégalité.

- (b) La formule d'intégrations par parties est le plus souvent bien connue. Cependant elle est souvent utilisée sur l'intervalle  $]0, 1]$ . La justification par croissance comparée de la limite est peu donnée.

- (c) Dans cette question, il est attendu une écriture correcte des inégalités permettant ensuite d'appliquer le théorème d'encadrement.

Cependant la manipulation des inégalités est assez hasardeuse. En particulier, certains pensent que les inégalités obtenues à l'aide des questions précédentes et celles obtenues après intégration sont équivalentes. La mention de la convergence des intégrales est indispensable ici.

Beaucoup terminent leur raisonnement et leur calcul en additionnant  $\int_0^1 \ln(t)dt$  uniquement sur les membres de droite des inégalités. Il est alors impossible de conclure par le théorème d'encadrement : les limites des membres aux extrémités des inégalités ne sont pas égales.

Le théorème d'encadrement n'est pas toujours correctement appliqué : Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(t)dt + \frac{1}{(n+1)^2}$ , on en déduit que  $-1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n \leq -1$  ou  $-1 \leq J_n \leq -1$ .

5. (a) Pour prouver la première inégalité  $\ln(x) \leq x$ , beaucoup ont étudié une fonction, mais l'étude n'est pas toujours menée jusqu'au bout. Quelques candidats se contentent d'étudier le signe de la dérivée sans s'intéresser à la valeur en 1.

Quelques candidats utilisent correctement la concavité de la fonction  $\ln$ .

Cependant, les opérations sur les inégalités sont peu soignées : on précise trop rarement le signe des quantités multiplicatives.

- (b) Cette question, quand elle est traitée, est plutôt correctement traitée, même si la convergence des intégrales est encore insuffisamment précisée.

- (c) Cette question est en général plutôt bien traitée, la première partie est très souvent abordée, même par

des candidats n'ayant pas traité les questions précédentes. La limite de  $I_n$  donne lieu à des réponses parfois surprenantes!

### Partie C

6. Dans cette question, le résultat du changement de variable étant donné par l'énoncé, le correcteur a été particulièrement attentif à la vérification des hypothèses de ce théorème, à la gestion des signes et de l'ordre des bornes, ainsi qu'au calcul de la dérivée d'une fonction composée. Ces différents points ont posé problème à de nombreux candidats ou ont fait l'objet d'entourloupes peu appréciées.

7. (a) On peut s'étonner du nombre important de candidats qui ne connaissent pas la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1 ou confondent avec la fonction de répartition.

Il arrive également que la densité soit bien donnée en deux morceaux, mais que les morceaux ne soient pas les bons ; Pour certains,  $x$  est plus petit ou plus grand que 1, pour d'autres  $f(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $f(x) = e^{-x}$  si  $x \geq 1$ ... et « vide juridique » entre 0 et 1. Là encore, les inégalités larges ou strictes sont mal gérées : 0 n'a pas d'image ou en a deux différentes.

(b) Le théorème de transfert semble parfois mal connu et est très souvent appliqué maladroitement. Quelques uns tentent de déterminer une densité de  $Y_n$  et perdent du temps sans aboutir dans leurs calculs.

Quand le théorème de transfert est appliqué à peu près correctement, beaucoup affirment que

$$\int_0^{+\infty} -\frac{u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^n} dt$$

en posant  $y = 0$  dans la question 6.

L'existence de l'espérance est très peu évoquée et encore moins prouvée. La « preuve » est souvent donnée uniquement sous la forme :  $X$  admet une espérance donc  $Y_n$  aussi. Certains pensent utiliser

une certaine linéarité de l'espérance pour obtenir «  $E\left(\frac{-X}{1+e^{-nX}}\right) = \frac{-E(X)}{1+e^{-nE(X)}}$  ».

8. Cette question d'informatique fut plutôt bien réalisée, mais en général de manière incomplète : l'une des instructions au moins est erronée.

Des erreurs de syntaxe se retrouvent souvent, comme des oublis de parenthèses ou de \* ou encore dans l'intervalle pour la boucle for qui est souvent faux : « for  $i = 1 : n$  » ou « for  $i = 1 : 2$  ».

La fonction exponentielle est confondue avec le nombre  $e$ , ce qui se traduit ici par l'apparition d'un « chapeau » incongru à côté de « exp ».

9. (a) Très peu de candidats répondent à cette question et quand ils le font au lieu d'un énoncé propre, une phrase explicative de l'énoncé est proposée.

Ceux(assez rares) qui tentent d'écrire le théorème proposent souvent des hypothèses imprécises ou incomplètes.

(b) Les candidats voient bien la moyenne mais pas le lien avec  $J_n$ .

### Exercice 3

#### Partie A

1. Cette question portant sur des exemples d'études d'événements et permettant d'appréhender l'énoncé est en général bien comprise mais rédigée très maladroitement et souvent de manière incorrecte.  
 En particulier les parenthèses souvent omises et indispensables pourtant dans l'écriture de  $[X = 4]$ , les probabilités et les événements sont trop souvent confondus et des écritures de type «  $P(F_1) \cap P(P_2)$  » sont trop souvent rencontrées ; les indices des événements ne sont pas toujours adaptés aux événements considérés, ainsi l'indice reste souvent égal à  $k$ .  
 L'argument d'incompatibilité pour le calcul de  $P(X = 4)$  est indispensable et trop souvent oublié.
2. De nombreux candidats ne saisissent pas le sens de la question et soit recopient l'énoncé soit se contentent de traduire les événements en français. Ici à nouveau, l'argument d'incompatibilité est indispensable.
3. (a) Cette question est assez souvent abordée, mais trop souvent la deuxième partie de cette question est incorrecte : « else pile=pile ».  
 (b) Cette question est peu traitée et quand elle l'est, les programmes fournis ne conviennent pas même quand ils sont inspirés des programme de l'exercice 2.  
 (c) La conjecture a été souvent bien vue mais avec une expression souvent maladroite. Elle ne fait pas toujours référence à la variable aléatoire  $X$  : « en moyenne, le premier double-PILE vient après 6 lancers », ou encore «  $X$  converge vers 6 », ou encore « en moyenne, en 200 lancers, on obtient 6 fois deux PILE consécutifs ».

#### Partie B

4. (a) Une bonne partie des candidats voit bien la réunion d'événements à écrire, une autre se lance dans un « baratin » interminable. . . Quelques candidats ressentent le besoin de préciser que les événements ne sont pas incompatibles pour s'autoriser à employer la formule du crible.  
 (b) Cette question est en général assez mal traitée, trop de candidats se contentent de paraphraser la relation sans l'ombre du commencement d'une explication.  
 (c) Quelques bonnes démarches, même si l'indépendance et l'incompatibilité sont rarement rappelées. Mais dans certaines copies, les résolutions proposées sont très farfelues.
5. Dans cette question, toute affirmation doit être soigneusement justifiée. Le signe de  $u_{n+1} - u_n$  (ou plutôt de  $1 - u_{n-2}$ ) n'est pas toujours justifié. Beaucoup trop de candidats pensent qu'une suite croissante et majorée par 1 converge vers 1 ou que « puisque  $u_n$  est une probabilité, elle tend forcément vers 1 ».
6. Cette question est peu abordée et peu réussie. Quand elle est traitée, la rigueur attendue n'est pas au rendez-vous et le théorème de limite monotone n'est pas connu. Trop de candidats n'écrivent pas correctement les complémentaires :  $\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n$  est trop souvent remplacé par  $\bigcup_{n=2}^{+\infty} \overline{U_n}$ .  
 Parfois encore, on lit  $\overline{[X = -1]} = U_n$ , puis la réunion apparaît soudain miraculeusement.

#### Partie C

7. Cette question est en général bien traitée, même si la gestion des calculs est assez maladroite : de nombreux candidats traînent des « -1 » jusqu'au bout.
8. Cette question est peu traitée et très rarement de manière satisfaisante.

9. Cette question portant sur une simple récurrence a rebuté de nombreux candidats. Ils ont souvent clairement tenté de traiter la question mais les calculs nécessaires à l'initialisation n'ont pas été menés jusqu'au bout. L'hérédité plus simple n'a alors même pas été tentée.
10. Cette question est assez peu traitée. Et quand elle l'est, les candidats utilisent la question précédente et non la définition de la suite  $(S_n)$ . À noter que si la suite  $(v_n)$  est décroissante, on ne peut pas en déduire directement la monotonie de la suite  $(nv_n)$ . La majoration est souvent affirmée, rarement démontrée.
11. Cette question est en général bien traitée quand elle est abordée. Cependant, une certaine confusion existe entre la série et les sommes partielles. Il est bon de préciser que la suite  $(S_n)$  converge et non le réel  $\sum_{k=0}^n kP(X = k)$  converge et vaut  $E(X)$ .
12. (a) Cette question est peu abordée. Certains parlent de la convergence de  $(S_n)$  mais pas de la convergence de  $(v_n)$ . D'autres ont tenté de chercher la monotonie de la suite  $(nv_n)$  mais se sont trompés dans l'écriture du terme de rang  $(n + 1)$ .
- (b) Cette question est très peu traitée, et avec très peu de réussite. La contradiction recherchée n'a pas été vue.
- (c) De rares candidats ont répondu à la question et en général leur copie était d'un très bon niveau.