TP3 Python (suites, matrices)

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1)En important le modules approprié, écrivez un programme accomplissant les tâches suivantes :

- création et affichage de A et B,
- calcul et affichage du produit AB,
- calcul et affichage de $C = {}^t(AB)$,
- calcul et affichage de ${}^tA$ et ${}^tB$,
- calcul et affichage de $D = ({}^tB)({}^tA)$.

2)Comparez C et D.

Exercice 2

On considère le système $(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & 4z & = & 2 \\ 2x & & & + & 3z & = & 1 \\ -\ 3x & + & 5y & + & 9z & = & 3 \end{array} \right.$

1)Précisez la matrice A du système (S), puis écrivez matriciellement (S) sous la forme $AX = B$.

2)En important les modules appropriés, écrivez un programme accomplissant les tâches suivantes :

- création et affichage de A et B,
- calcul et affichage de A^{-1},
- affichage de l'unique solution de (S).

3)Retrouvez cette solution sur la console en utilisant la commande solve.

Exercice 3

On considère les suites couplées $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & \frac{1}{6} u_n & + & \frac{1}{6} v_n \\ v_{n+1} & = & u_n & + & \frac{1}{3} v_n \end{array} \right.$$

On donne $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$. On pose $C_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1)Déterminez $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}, C_{n+1} = AC_n$.

2)Montrez par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, C_n = A^n C_0$.

3)Ecrivez un programme qui à un entier n entré par l'utilisateur renvoie la valeur de u_n et v_n. Conjecturez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 4 (inspiré d'ecricome 2015)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = 1 - exp(-u_n)$.

1)Complétez les programmes suivants pour qu'ils affichent u_9.

```
#programme 1
import numpy as np
suite=[1]
for n in range(.....):
    suite.append(..............................)
print('u_9 =', ............)
```

```
#programme 2
import numpy as np
u=1
for n in range(.....):
    u= ...................
print('u_9 =',.............)
```

2)Quel programme est le mieux adapté pour obtenir immédiatement u_5 et $\sum_{n=0}^{9} u_n$ sur la console ? Justifiez.

Exercice 5

Dans le module numpy, les fonctions hstack et vstack [1] permettent de concaténer deux matrices A et B suivant une direction horizontale ou verticale.

1)Exécutez le programme suivant pour vous familiariser :

```
import numpy as np
A=np.array(([1,2],[3,4]))
B=np.array(([5],[6]))
C=np.array(([7,8]))
print("concaténation de A et B suivant l'axe horizontal :")
H=np.hstack((A, B))
print('A=',A)
print('B=',B)
print('H=',H)
print("concaténation de A et C suivant l'axe vertical :")
V=np.vstack((A, C))
print('A=',A)
print('C=',C)
print('V=',V)
```

1. stack=empilement

2)Ecrivez la matrice D renvoyée par le programme suivant :

```
import numpy as np
A=np.eye(4)
L=np.zeros(shape=(1,4))
C=np.ones(shape=(5,1))
B=np.vstack((L,A))
D=np.hstack((C,B))
```

3)Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ecrivez un programme affichant M à l'aide de concaténations de matrices de type ones et zeros.

<u>Exercice 6</u>

Ecrivez une fonction de trois arguments (a et b réels, n entier) qui renvoie la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent b sauf ceux de la diagonale qui valent a.

Puis, appelez la fonction avec des valeurs a,b et n de votre choix.

<u>Exercice 7</u>

Dans tout l'exercice, $n \geq 1$ est un entier.

1)Soient $u = (u_1\ u_2\ ...\ u_n)$ et $v = (1\ 1\ ...\ 1)$. Calculez $\left({}^t u\right) v$.

2)Que va afficher le programme suivant ?

```
import numpy as np
n=int(input("entrer n"))
u=np.zeros(shape=(1,n))
for k in range(n):
    u[0,k]=k+1
print(u)
```

3)A l'aide de la question 1), complétez ce programme pour qu'il affiche la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients de la i-ème ligne valent i (pour tout $i \in [\![1, n]\!]$).

4)Réécrivez le programme de 3) grâce à une boucle et des concaténations.

<u>Exercice 8</u>

On dit qu'une matrice carrée est stochastique si :

− ses coefficients sont positifs ou nuls,

− sur chaque ligne, la somme de ses coefficients fait 1.

1)Donnez un exemple de matrice stochastique.

2)Ecrivez une fonction dont l'argument est une matrice carrée A et qui retourne $True$ si A est stochastique et $False$ sinon.