Problème (hec 2023)

Partie I

1)a)En mutipliant membre à membre l'inégalité $0 \leq x \leq t$ par $\varphi(t) > 0$, on a :

$$\forall x \geq 0,\ \forall t \geq x,\ 0 \leq x\varphi(t) \leq t\varphi(t).$$

Soit $x \geq 0$ et $A \geq x$. En intégrant les inégalités précédentes entre x et A, on a :

$0 \leq \displaystyle\int_x^A x\varphi(t)dt \leq \int_x^A t\varphi(t)dt.$

Or, $\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \times (-t) \times e^{-\frac{t^2}{2}} = -t\varphi(t).$

Donc $0 \leq x\displaystyle\int_x^A \varphi(t)dt \leq \int_x^A -\varphi'(t)dt$, puis $0 \leq x\displaystyle\int_x^A \varphi(t)dt \leq [-\varphi(t)]_x^A$,

et $0 \leq x\displaystyle\int_x^A \varphi(t)dt \leq \varphi(x) - \varphi(A).$

Il reste à passer à la limite quand $A \to +\infty$ dans chaque membre.

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_x^A \varphi(t)dt = \int_x^{+\infty} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt - \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = 1 - \Phi(x).$

et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \varphi(A) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A^2}{2}} = 0$ car $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -\frac{A^2}{2} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$

$$\text{Finalement, } \forall x \geq 0,\ 0 \leq x\big(1 - \Phi(x)\big) \leq \varphi(x).$$

b)En partant de l'inégalité $t \leq x \leq 0$ et en mutipliant membre à membre par $\varphi(t) > 0$, on a :

$$\forall x \leq 0,\ \forall t \leq x,\ t\varphi(t) \leq x\varphi(t) \leq 0.$$

Soit $x \leq 0$ et $B \leq x$. En intégrant les inégalités précédentes entre B et x, on a :

$\displaystyle\int_B^x t\varphi(t)dt \leq \int_B^x x\varphi(t)dt \leq 0$, d'où $\varphi(B) - \varphi(x) \leq x\displaystyle\int_B^x \varphi(t)dt \leq 0.$

Il reste à passer à la limite quand $B \to -\infty$ dans chaque membre.

$\displaystyle\lim_{B\to-\infty} \varphi(B) = 0$ et $\displaystyle\lim_{B\to-\infty} \int_B^x \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^x \varphi(t)dt = \Phi(x).$

$$\text{Finalement, } \forall x \leq 0,\ -\varphi(x) \leq x\Phi(x) \leq 0.$$

c)• Soit $x \in \mathbf{R}$ et $B \leq x$.

Effectuons une intégration par parties sur $\displaystyle\int_B^x \Phi(t)dt$ en posant :

$u(t) = \Phi(t) \qquad v'(t) = 1$

$u'(t) = \varphi(t) \qquad v(t) = t.$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. L'IPP est licite et donne :

$$\int_B^x \Phi(t)dt = \big[t\Phi(t)\big]_B^x - \int_B^x t\varphi(t)dt$$
$$= x\Phi(x) - B\Phi(B) - \int_B^x -\varphi'(t)dt$$
$$= x\Phi(x) - B\Phi(B) + \varphi(x) - \varphi(B).$$
$\lim\limits_{B\to-\infty} \varphi(B) = 0.$

En outre, la question 1)b) donne, en prenant $B < 0$: $-\varphi(B) \leq B\Phi(B) \leq 0$.

D'après la propriété des gendarmes, on a alors : $\lim\limits_{B\to-\infty} B\Phi(B) = 0$.

Finalement, $\lim\limits_{B\to-\infty} \big(x\Phi(x) - B\Phi(B) + \varphi(x) - \varphi(B)\big) = x\Phi(x) + \varphi(x)$.

Ainsi, $\int_{-\infty}^x \Phi(t)dt$ converge et $\int_{-\infty}^x \Phi(t)dt = x\Phi(x) + \varphi(x) \qquad (R_1)$

• Soit $x \in \mathbf{R}$ et $A \geq x$.

Effectuons une intégration par parties sur $\int_x^A \big(1 - \Phi(t)\big)dt$ en posant :

$u(t) = 1 - \Phi(t) \qquad v'(t) = 1$
$u'(t) = -\varphi(t) \qquad v(t) = t.$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. L'IPP est licite et donne :

$$\int_x^A \big(1 - \Phi(t)\big)dt = \big[t\big(1 - \Phi(t)\big)\big]_x^A - \int_x^A -t\varphi(t)dt$$
$$= A\big(1 - \Phi(A)\big) - x\big(1 - \Phi(x)\big) - \int_x^A \varphi'(t)dt$$
$$= A\big(1 - \Phi(A)\big) - x\big(1 - \Phi(x)\big) + \varphi(x) - \varphi(A).$$
$\lim\limits_{A\to-\infty} \varphi(A) = 0.$

En outre, la question 1)a) donne, en prenant $A > 0$: $0 \leq A\big(1 - \Phi(A)\big) \leq \varphi(A)$.

D'après la propriété des gendarmes, on a alors : $\lim\limits_{A\to+\infty} A\big(1 - \Phi(A)\big) = 0$.

Donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \Big(A\big(1 - \Phi(A)\big) - x\big(1 - \Phi(x)\big) + \varphi(x) - \varphi(A)\Big) = -x\big(1 - \Phi(x)\big) + \varphi(x)$.

Ainsi, $\int_x^{+\infty} \big(1-\Phi(t)\big)dt$ converge et $\int_x^{+\infty} \big(1-\Phi(t)\big)dt = -x\big(1-\Phi(x)\big)+\varphi(x) \quad (R_1)$

2)a)• Soient x et y des réels. Soit I un intervalle contenant x et y.

$h \in W$ donc h est dérivable sur I et $\forall t \in I,\ |h'(t)| \leq 1$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors : $\big|h(x) - h(y)\big| \leq 1|x - y|$, c'est-à-dire : $\big|h(x) - h(y)\big| \leq |x - y|$.

• Pour tout $x \in \mathbf{R}$, en écrivant : $h(x) = \big(h(x) - h(0)\big) + h(0)$, l'inégalité triangulaire donne :

$|h(x)| \leq |h(x) - h(0)| + |h(0)| \quad (1)$

De plus, l'inégalité démontrée au-dessus avec $y = 0$ donne : $\big|h(x) - h(0)\big| \leq |x|$, puis $\big|h(x) - h(0)\big| + |h(0)| \leq |x| + |h(0)| \quad (2)$

En recollant (1) et (2), on déduit que $\forall x \in \mathbf{R},\ |h(x)| \leq |x| + |h(0)|$.

b)Soit $x \in \mathbf{R}$.

• $\forall t \leq x,\ |h'(t)| \leq 1$ donc $|h'(t)|\Phi(t) \leq \Phi(t)$, puis $|h'(t)||\Phi(t)| \leq \Phi(t)$ grâce à la positivité de Φ.

Ainsi, $\forall t \leq x,\ |h'(t)\Phi(t)| \leq \Phi(t)$.

Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)dt$ converge (question 1)c)), on peut conclure d'après le critère de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives que $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} |h'(t)\Phi(t)|dt$ converge.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt$ est absolument convergente donc convergente.

• Soit $B \leq x$. Effectuons une intégrations par parties sur $\displaystyle\int_{B}^{x} h'(t)\Phi(t)dt$ en posant :

$u'(t) = h'(t) \qquad v(t) = \Phi(t)$

$u(t) = h(t) \qquad v'(t) = \varphi(t)$.

u et v sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. L'IPP esrt licite et donne :

$$\begin{aligned}\int_{B}^{x} h'(t)\Phi(t)dt &= \big[h(t)\Phi(t)\big]_B^x - \int_{B}^{x} h(t)\varphi(t)dt \\ &= h(x)\Phi(x) - h(B)\Phi(B) - \int_{B}^{x} h(t)\varphi(t)dt \quad (*)\end{aligned}$$

La question 2)a) donne : $0 \leq |h(B)| \leq |B| + |h(0)|$, puis :

$0 \leq |h(B)||\Phi(B)| \leq |B||\Phi(B)| + |h(0)||\Phi(B)|$, ou encore :

$0 \leq |h(B)\Phi(B)| \leq |B\Phi(B)| + |h(0)||\Phi(B)|$.

$\displaystyle\lim_{B\to-\infty} B\Phi(B) = 0$ (voir argument dans la question 1)c)) et $\displaystyle\lim_{B\to-\infty} \Phi(B) = 0$ car Φ est une fonction de répartition.

Donc $\displaystyle\lim_{B\to-\infty} \big(|B\Phi(B)| + |h(0)||\Phi(B)|\big) = 0$.

Par la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{B\to-\infty} |h(B)\Phi(B)| = 0$, et $\displaystyle\lim_{B\to-\infty} h(B)\Phi(B) = 0$.

Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt$ converge et que $\displaystyle\lim_{B\to-\infty} h(B)\Phi(B) = 0$, on a par passage à la limite dans $(*)$:

$\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h(t)\varphi(t)dt$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt = h(x)\Phi(x) - \int_{-\infty}^{x} h(t)\varphi(t)dt$.

c)En soustrayant les égalités précédentes, on a :

$$-\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt + \int_{x}^{+\infty} h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)dt$$

$$= -h(x)\Phi(x) + \int_{-\infty}^{x} h(t)\varphi(t)dt - h(x)\big(1-\Phi(x)\big) + \int_{x}^{+\infty} h(t)\varphi(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t)dt - h(x) \quad \text{par la relation de Chasles}$$

$$= c_h - h(x) \quad \text{d'après le théorème de transfert.}$$

3)a)θ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ comme quotient de dexu fonctions C^1.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbf{R},\ \theta'(x) &= \frac{\Phi'(x)\varphi(x) - \varphi'(x)\Phi(x)}{\varphi(x)^2} \\ &= \frac{\varphi(x)^2 + x\varphi(x)\Phi(x)}{\varphi(x)^2} \\ &= 1 + x\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)} \\ &= 1 + x\theta(x).\end{aligned}$$

θ' est alors de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ comme somme et produit de fonctions C^1.
Donc θ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbf{R},\ \theta''(x) &= \theta(x) + x\theta'(x) \\ &= \theta(x) + x\big(1 + x\theta(x)\big) \\ &= x + (1 + x^2)\theta(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbf{R},\ \theta(-x)\Phi(x) &= \frac{\Phi(-x)}{\varphi(-x)}\Phi(x) \\ &= \frac{1 - \Phi(x)}{\varphi(x)}\Phi(x) \\ &= \theta(x)\big(1 - \Phi(x)\big).\end{aligned}$$

b)• D'après la question 2)b), $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt$ est convergente pour tout $x \in \mathbf{R}$.

La relation de Chasles donne : $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} h'(t)\Phi(t)dt}_{\text{constante}} + \int_{0}^{x} h'(t)\Phi(t)dt.$

La fonction $t \mapsto h'(t)\Phi(t)$ est continue sur $\mathbf{R}$ puique h et Φ sont C^1.

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{0}^{x} h'(t)\Phi(t)dt$ est donc une primitive de $x \mapsto h'(x)\Phi(x)$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

On déduit que $x \mapsto \displaystyle\int_{0}^{x} h'(t)\Phi(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et

$$\left(\int_{0}^{x} h'(t)\Phi(t)dt\right)' = h'(x)\Phi(x).$$

Donc $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et

$$\left(\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt\right)' = h'(x)\Phi(x).$$

• De même, $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} h'(t)\big(1 - \Phi(t)\big)dt$ est convergente pour tout $x \in \mathbf{R}$.

$$\int_{x}^{+\infty} h'(t)\big(1 - \Phi(t)\big)dt = \underbrace{\int_{0}^{+\infty} h'(t)\big(1 - \Phi(t)\big)dt}_{\text{constante}} - \int_{0}^{x} h'(t)\big(1 - \Phi(t)\big)dt.$$

Par le même raisonnement, $x \mapsto \int_0^x h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et

$$\left(\int_0^x h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)dt\right)' = h'(x)\big(1-\Phi(x)\big).$$

Donc $x \mapsto \int_x^{+\infty} h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et

$$\left(\int_x^{+\infty} h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)dt\right)' = -h'(x)\big(1-\Phi(x)\big).$$

• f_h est donc C^1 sur $\mathbf{R}$ comme somme, produit et composée de fonctions C^1.
Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$f_h'(x) - xf_h(x)$
$= -\theta'(-x)\int_{-\infty}^x h'(t)\Phi(t)dt + \theta(-x)h'(x)\Phi(x) + \theta'(x)\int_x^{+\infty} h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)dt$
$-\theta(x)h'(x)\big(1-\Phi(x)\big) - x\theta(-x)\int_{-\infty}^x h'(t)\Phi(t)dt - x\theta(x)\int_x^{+\infty} h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)dt$
$= \big(-\theta'(-x) - x\theta(-x)\big)\int_{-\infty}^x h'(t)\Phi(t)dt + \big(\theta'(x) - x\theta(x)\big)\int_x^{+\infty} h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)dt$
$+h'(x)\Big(\theta(-x)\Phi(x) - \theta(x)\big(1-\Phi(x)\big)\Big) \quad (*)$

D'après la question 3)a), on a : $\forall x \in \mathbf{R},\ \theta'(x) - x\theta(x) = 1$.
En faisant $x \mapsto -x$, on a alors : $\forall x \in \mathbf{R},\ \theta'(-x) + x\theta(-x) = 1$.
On a également $\forall x \in \mathbf{R},\ \theta(-x)\Phi(x) - \theta(x)\big(1-\Phi(x)\big) = 0$.
En reprenant le calcul fait en $(*)$, on déduit :

$$\begin{aligned} f_h'(x) - xf_h(x) &= -\int_{-\infty}^x h'(t)\Phi(t)dt + \int_x^{+\infty} h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)dt + h'(x)\times 0 \\ &= c_h - h(x) \quad \text{d'après 2)c} \end{aligned}$$

• $\forall x \in \mathbf{R},\ f_h'(x) = xf_h(x) + c_h - h(x)$.
f_h' est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ comme produit et somme de fonctions C^1,
ce qui prouve que f_h est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$.

c)Soit X une variable aléatoire admettant une espérance.
D'après la question 3)b), on a alors :
$\forall \omega \in \Omega,\ f_h'\big(X(\omega)\big) - X(\omega)f_h\big(\big(X(\omega)\big)\big) = c_h - h\big(X(\omega)\big)$, c'est-à-dire :
$\big(f_h'(X)\big)(\omega) - \big(Xf_h(X)\big)(\omega) = c_h - \big(h(X)\big)(\omega)$.
On a donc l'égalité entre variables aléatoires : $f_h'(X) - Xf_h(X) = \underbrace{c_h}_{\text{constante}} - h(X)$.

Comme $h \in W$ et que X admet une espérance, on sait par hypothèse de l'énoncé que $h(X)$ admet une espérance.
Donc $f_h'(X) - Xf_h(X)$ admet une espérance donnée par :

$E\big(f_h'(X) - Xf_h(X)\big) = E\big(c_h - h(X)\big)$.
Par linéarité de l'espérance, on déduit : $E\big(f_h'(X) - Xf_h(X)\big) = c_h - E\big(h(X)\big)$.
Enfin, comme $c_h = E\big(h(N)\big)$, on a en passant à la valeur absolue :

$$\big|E\big(h(X)\big) - E\big(h(N)\big)\big| = \big|E\big(f_h'(X) - Xf_h(X)\big)\big|.$$

4)a)Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :
$\theta(-x)\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)dt + \theta(x)\int_{x}^{+\infty} \big(1 - \Phi(t)\big)dt$
$= \theta(-x)\big(x\Phi(x) + \varphi(x)\big) + \theta(x)\big(-x\big(1 - \Phi(x)\big) + \varphi(x)\big)$ d'après (R_1)
$= x\theta(-x)\Phi(x) + \theta(-x)\varphi(x) - x \underbrace{\theta(x)\big(1 - \Phi(x)\big)}_{=\theta(-x)\Phi(x)\ cf.3)a)} + \theta(x)\varphi(x)$
$= \big(\theta(-x) + \theta(x)\big)\varphi(x)$
$= \left(\dfrac{\Phi(-x)}{\varphi(-x)} + \dfrac{\Phi(x)}{\varphi(x)}\right)\varphi(x)$
$= \Phi(-x) + \Phi(x)$ car $\varphi(-x) = \varphi(x)$
$= 1.$

b)Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :
$\big|f_h(x)\big| = \left|\theta(-x)\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt + \theta(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)\big(1 - \Phi(t)\big)dt\right|.$
L'inégalité triangulaire donne :
$\big|f_h(x)\big| \leq \left|\theta(-x)\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt\right| + \left|\theta(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)\big(1 - \Phi(t)\big)dt\right| \quad (*)$
D'une part, du fait de la positivité de θ, on a :
$\left|\theta(-x)\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt\right| = \theta(-x)\left|\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt\right|.$
Puis, par l'inégalité triangulaire sur l'intégrale avec bornes croissantes :
$\left|\theta(-x)\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt\right| \leq \theta(-x)\int_{-\infty}^{x} \big|h'(t)\Phi(t)\big|dt \quad (1)$
De plus, $\forall t \in \mathbf{R},\ \big|h'(t)\Phi(t)\big| = \big|h'(t)\big|\Phi(t) \leq \Phi(t)$ car $h \in W$.
En intégrant suivant des bornes croissantes, on a :
$\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \big|h'(t)\Phi(t)\big|dt \leq \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)dt,$
et $\theta(-x)\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \big|h'(t)\Phi(t)\big|dt \leq \theta(-x)\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)dt \quad (2)$
En recollant (1) et (2), on a :
$\left|\theta(-x)\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt\right| \leq \theta(-x)\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)dt \quad (3)$
D'autre part, par le même raisonnement, on a :
$\left|\theta(x)\displaystyle\int_{x}^{+\infty} h'(t)\big(1 - \Phi(t)\big)dt\right| \leq \theta(x)\int_{x}^{+\infty} \big(1 - \Phi(t)\big)dt \quad (4)$

En faisant la somme de (3) et (4) et compte tenu de $(*)$, on conclut que :

$$\left|f_h(x)\right| \leq \theta(-x)\int_{-\infty}^{x}\Phi(t)dt + \theta(x)\int_{x}^{+\infty}\big(1-\Phi(t)\big)dt.$$

Or, le membre de droite vaut 1 d'après la question 4)a).

$$\text{Ainsi },\forall x \in \mathbf{R},\ \left|f_h(x)\right| \leq 1.$$

5)a)Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et grâce à la question 3)a), on a :

$$\theta''(-x)\int_{-\infty}^{x}\Phi(t)dt + \theta''(x)\int_{x}^{+\infty}\big(1-\Phi(t)\big)dt$$

$$= \big(-x+(1+x^2)\theta(-x)\big)\int_{-\infty}^{x}\Phi(t)dt + \big(x+(1+x^2)\theta(x)\big)\int_{x}^{+\infty}\big(1-\Phi(t)\big)dt$$

$$= x\left(\int_{x}^{+\infty}\big(1-\Phi(t)\big)dt - \int_{-\infty}^{x}\Phi(t)dt\right) + (1+x^2)\left(\theta(-x)\int_{-\infty}^{x}\Phi(t)dt + \theta(x)\int_{x}^{+\infty}\big(1-\Phi(t)\big)dt\right)$$

En utilisant les égalités (R_1) et la question 4)a), on poursuit le calcul :

$$\theta''(-x)\int_{-\infty}^{x}\Phi(t)dt + \theta''(x)\int_{x}^{+\infty}\big(1-\Phi(t)\big)dt$$

$$= x\left(-x\big(1-\Phi(x)\big) + \varphi(x) - x\Phi(x) - \varphi(x)\right) + (1+x^2)\times 1$$

$$= 1.$$

b)D'après la question 3)b), f_h est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_h'(x) = xf_h(x) + c_h - h(x).$$

En dérivant membre à membre, on a :

$$\begin{aligned} f_h''(x) &= f_h(x) + xf_h'(x) - h'(x) \\ &= f_h(x) + x\big(xf_h(x) + c_h - h(x)\big) - h'(x) \\ &= -h'(x) + (1+x^2)f_h(x) + x\big(c_h - h(x)\big) \quad (*) \end{aligned}$$

Or, $(1+x^2)f_h(x)$

$$= (1+x^2)\left(\theta(-x)\int_{-\infty}^{x}h'(t)\Phi(t)dt + \theta(x)\int_{x}^{+\infty}h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)dt\right)$$

$$= (1+x^2)\theta(-x)\int_{-\infty}^{x}h'(t)\Phi(t)dt + (1+x^2)\theta(x)\int_{x}^{+\infty}h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)dt.$$

On poursuit le calcul en utilisant que $\forall x \in \mathbf{R},\ \theta''(x) = x + (1+x^2)\theta(x)$,
ce qui donne $(1+x^2)\theta(x) = \theta''(x) - x$, mais aussi $(1+x^2)\theta(-x) = \theta''(-x) + x$ en faisant $x \mapsto -x$.

Donc $(1+x^2)f_h(x)$

$$= \big(\theta''(-x) + x\big)\int_{-\infty}^{x}h'(t)\Phi(t)dt + \big(\theta''(x) - x\big)\int_{x}^{+\infty}h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)dt.$$

$$= \theta''(-x)\int_{-\infty}^{x}h'(t)\Phi(t)dt + \theta''(x)\int_{x}^{+\infty}h'(t)\big(1-\Phi(t)\big) - x\left(\int_{x}^{+\infty}h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)dt - \int_{-\infty}^{x}h'(t)\Phi(t)dt\right).$$

$$= \theta''(-x)\int_{-\infty}^{x}h'(t)\Phi(t)dt + \theta''(x)\int_{x}^{+\infty}h'(t)\big(1-\Phi(t)\big) - x\big(c_h - h(x)\big) \quad \text{par 2)c)}$$

En substituant $(1+x^2)f_h(x)$ dans $(*)$, on conclut que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_h''(x) = -h'(x) + \theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt + \theta''(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)\big(1-\Phi(t)\big).$$

c)• La fonction $a : x \mapsto \Phi(x) + \dfrac{x}{1+x^2}\varphi(x)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme, produit et quotient de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbf{R},\ a'(x) &= \varphi(x) + \frac{1(1+x^2)-2x^2}{\big(1+x^2\big)^2}\varphi(x) + \frac{x}{1+x^2}\varphi'(x)\\
&= \varphi(x) + \frac{1-x^2}{\big(1+x^2\big)^2}\varphi(x) + \frac{x}{1+x^2}\times\big(-x\varphi(x)\big)\\
&= \left(1+\frac{1-x^2}{\big(1+x^2\big)^2} - \frac{x^2}{1+x^2}\right)\varphi(x)\\
&= \frac{\big(1+x^2\big)^2 + 1 - x^2 - x^2(1+x^2)}{\big(1+x^2\big)^2}\ \varphi(x)\\
&= \frac{2}{\big(1+x^2\big)^2}\ \varphi(x) \quad \text{en développant le numérateur.}
\end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbf{R},\ \phi(x) > 0$ et $\big(1+x^2\big)^2 > 0$ donc $\forall x \in \mathbf{R},\ a'(x) > 0$.
a est donc strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1+x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x) = 0$.
Par somme et produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} a(x) = 0$.
Par ailleurs, a est strictement croissante sur $\mathbf{R}$, donc $\forall x \in \mathbf{R},\ a(x) > 0$.

• $$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbf{R},\ \theta''(x) &= x + (1+x^2)\theta(x)\\
&= x + (1+x^2)\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)}\\
&= \frac{1+x^2}{\varphi(x)}\left(\frac{x}{1+x^2}\varphi(x) + \Phi(x)\right)\\
&= \frac{1+x^2}{\varphi(x)}a(x) > 0.
\end{aligned}$$

• En passant à la valeur absolue dans la question 5)b) et en appliquant l'inégalité triangulaire, on a :

$$\big|f_h''(x)\big| \le \big|h'(x)\big| + \left|\theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt\right| + \left|\theta''(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)dt\right| \quad (1)$$

L'inégalité triangulaire pour les intégrales avec bornes croissantes, ainsi que la positivité de θ'' donne :

$$\left|\theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt\right| \le \theta''(-x)\int_{-\infty}^{x}\big|h'(t)\Phi(t)\big|dt \quad (2)$$

et $$\left|\theta''(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)\right| \le \theta''(x)\int_{x}^{+\infty}\big|h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)\big|dt \quad (3)$$

De plus, $\forall t \in \mathbf{R},\ \big|h'(t)\Phi(t)\big| = \big|h'(t)\big|\Phi(t) \leq \Phi(t)$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \big|h'(t)\Phi(t)\big|dt \leq \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)dt$, ce qui donne :

$$\theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} \big|h'(t)\Phi(t)\big|dt \leq \theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)dt \quad (4)$$

De même, $\forall t \in \mathbf{R},\ \big|h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)\big| = \big|h'(t)\big|\big(1-\Phi(t)\big) \leq \big(1-\Phi(t)\big)$

Donc $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} \big|h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)\big|dt \leq \int_{x}^{+\infty} \big(1-\Phi(t)\big)\big|dt$, ce qui donne :

$$\theta''(x)\int_{x}^{+\infty} \big|h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)\big|dt \leq \theta''(x)\int_{x}^{+\infty} \big(1-\Phi(t)\big)\big|dt \quad (5)$$

En recollant (2) et (4), on a :

$$\left|\theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt\right| \leq \theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)dt \quad (6)$$

En recollant (3) et (5), on a :

$$\left|\theta''(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)\right| \leq \theta''(x)\int_{x}^{+\infty} \big(1-\Phi(t)\big)\big|dt \quad (7)$$

En ajoutant (6) et (7), et en utilisant la question 5)a), on a :

$$\left|\theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)dt\right| + \left|\theta''(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)\big(1-\Phi(t)\big)\right| \leq 1$$

Comme $h \in W$, on a enfin $\forall x \in \mathbf{R},\ \big|h'(x)\big| \leq 1$, puis grâce à (1) :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \big|f_h''(x)\big| \leq 2.$$

Partie II

6)$h_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq x \\ 0 & \text{si } t > x \end{cases}$ donc $\forall \omega \in \Omega,\ h_x\big(X(\omega)\big) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \leq x \\ 0 & \text{si } X(\omega) > x \end{cases}$

ce qui signifie que $h_x(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } (X \leq x) \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\text{Donc } h_x(X) \hookrightarrow \mathscr{B}\big(P(X \leq x)\big).$$

$h_x(X)$ admet donc une espérance et $E\big(h_x(X)\big) = P(X \leq x) = F_X(x)$.

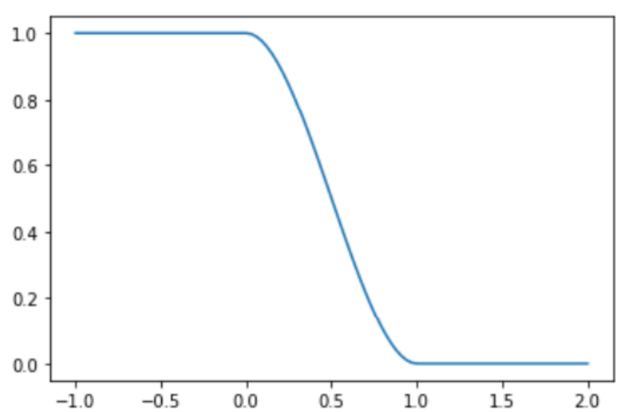
7)a)programme :

```
def gamma(t):
    if t<0:
        return 1
    elif t>1:
        return 0
    else:
        return 1-3*t**2+2*t**3
```

b)On crée un vecteur t à pas constant constitué de 100 points uniformément répartis de -1 à 2.
Puis, on construit une liste y par compréhension à l'aide de la fonction gamma.
Ce qui donne :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
t=np.linspace(-1,2,100)
y=[gamma(t) for t in np.linspace(-1,2,100)]
plt.plot(t,y)
plt.show()
```

Et qui renvoie la figure ci-dessous :



Remarque
Le programme plus basique ci-dessous ne fonctionne pas du fait que la fonction gamma est définie à l'aide de conditions.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
t=np.linspace(-1,2,100)
plt.plot(t,gamma(t))
plt.show()
```

8)a)• γ est continue sur $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$ (fonction nulle), ainsi que sur $[0,1]$ (polynôme). Elle est donc en particulier continue à droite en 0 et à gauche en 1.

De plus, $\lim\limits_{t\to 0^-}\gamma(t)=\lim\limits_{t\to 0^-} 1=1=\gamma(0)$ donc γ est continue à gauche en 0, et par suite continue en 0.

Enfin, $\lim\limits_{t\to 1^+}\gamma(t)=\lim\limits_{t\to 1^+} 0=0=\gamma(1)$ donc γ est continue à droite en 1, et par suite continue en 1.

Finalement, γ est continue sur $\mathbf{R}$.

• γ est de classe C^1 sur $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$ (fonction nulle), ainsi que sur $[0,1]$ (polynôme). Elle est donc de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ privé de 0 et 1.

b)$\forall t\in[0,1],\ \gamma'(t)=-6t+6t^2=6t(t-1)\leq 0$. Donc γ est décroissante sur $[0,1]$.
On a donc $\forall t\in[0,1],\ \gamma(1)\leq\gamma(t)\leq\gamma(0)$, c'est-à-dire : $0\leq\gamma(t)\leq 1$.

Par ailleurs, γ est constante et égale à 1 sur $]-\infty,0[$, constante et égale à 0 sur $]1,+\infty[$.
On a donc bien $\forall t\in\mathbf{R},\ \gamma(t)\in[0,1]$.

c)D'une part, on a :
$\lim\limits_{t\to 1^+}\dfrac{\gamma(t)-\gamma(1)}{t-1}=\lim\limits_{t\to 1^+}\dfrac{0-0}{t-1}=0$. Donc γ est dérivable à droite en 1 et $\gamma'_d(1)=0$.
D'autre part, on a :
$$\lim_{t\to 1^-}\frac{\gamma(t)-\gamma(1)}{t-1}=\lim_{t\to 1^-}\frac{1-3t^2+2t^3}{t-1}=\lim_{t\to 1^-}\frac{\cancel{(t-1)}(2t^2-t-1)}{\cancel{t-1}}=0.$$
Donc γ est dérivable à gauche en 1 et $\gamma'_g(1)=0$.
Comme $\gamma'_g(1)=\gamma'_d(1)=0$, on peut conclure que γ est dérivable en 1 et que $\gamma'(1)=0$.

d)• Les questions précédentes ont montré que γ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
De plus, on a :
$$\gamma'(t)=\begin{cases}-6t+6t^2 & \text{si } t\in[0,1]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
γ' est continue sur $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$ (fonction nulle), ainsi que sur $[0,1]$ polynôme. Elle est donc en particulier continue à droite en 0 et à gauche en 1.

De plus, $\lim\limits_{t\to 0^-}\gamma'(t)=\lim\limits_{t\to 0^-} 0=0=\gamma'(0)$ donc γ' est continue à gauche en 0, et par suite continue en 0.

Enfin, $\lim\limits_{t\to 1^+}\gamma'(t)=\lim\limits_{t\to 1^+} 0=0=\gamma'(1)$ donc γ' est continue à droite en 1, et par suite continue en 1.

Finalement, γ' est continue sur $\mathbf{R}$.

γ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et γ' est continue sur $\mathbf{R}$, ce qui signifie que γ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

• L'inégalité demandée est évidente sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$, puisque γ' est nulle sur ces intervalles.

Par ailleurs, γ' est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1],\ \gamma''(t) = -6 + 12t$, fonction qui s'annule et change de signe en $1/2$.
D'où le tableau de variations de γ' :

t	0		$1/2$		1
$\gamma''(t)$		$-$	0	$+$	
$\gamma'(t)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	0

On a donc $\forall t \in [0,1],\ -\dfrac{3}{2} \leq \gamma'(t) \leq 0$ donc $\forall t \in [0,1],\ \left|\gamma'(t)\right| \leq \dfrac{3}{2}$.

9)Soit $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}$.

a)Distinguons deux cas :

• $y \leq x$

On a $h_x(y) = 1$ et $k_x(y) = \gamma\left(\dfrac{y-x}{t}\right) = 1$ car $\dfrac{y-x}{t} \leq 0$ et γ est constante et égale à 1 sur $]-\infty, 0]$.
Donc $h_x(y) = k_x(y)$.

• $y > x$

On a $h_x(y) = 0$ et $k_x(y) = \gamma\left(\dfrac{y-x}{t}\right) \geq 0$ car γ est positive sur $\mathbf{R}$.

Donc $h_x(y) \leq k_x(y)$.

Dans tous les cas, on a bien $\forall y \in \mathbf{R},\ h_x(y) \leq k_x(y)$.

b)La question précédente entraîne que $h_x(X) \leq k_x(X)$.

Par croissance de l'espérance, on a alors : $E\big(h_x(X)\big) \leq E\big(k_x(X)\big)$.

Puis, $E\big(h_x(X)\big) - E\big(h_x(N)\big) \leq E\big(k_x(X)\big) - E\big(h_x(N)\big)$, ou encore :

$E\big(h_x(X)\big) - E\big(h_x(N)\big) \leq E\big(k_x(X)\big) - E\big(k_x(N)\big) + E\big(k_x(N)\big) - E\big(h_x(N)\big)$.

c)Le théorème de transfert donne :

$E\big(k_x(N)\big)$

$= \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} k_x(u)\varphi(u)du$

$= \displaystyle\int_{-\infty}^{x} k_x(u)\varphi(u)du + \int_{x}^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du + \int_{x+t}^{+\infty} k_x(u)\varphi(u)du$

$$= \int_{-\infty}^{x} \gamma\left(\underbrace{\boxed{\frac{u-x}{t}}}_{\leq 0}\right)\varphi(u)du + \int_{x}^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du + \int_{x+t}^{+\infty} \gamma\left(\underbrace{\boxed{\frac{u-x}{t}}}_{\geq 1}\right)\varphi(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{x} 1 \times \varphi(u)du + \int_{x}^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du + \int_{x}^{x+t} 0 \times \varphi(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)du + \int_{x}^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du.$$

$$= \Phi(x) + \int_{x}^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du.$$

$= E\big(h_x(N)\big) + \displaystyle\int_{x}^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du$ comme pour la question 6)

Finalement, $E\big(k_x(N)\big) - E\big(h_x(N)\big) = \displaystyle\int_{x}^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du.$

d)• $u \mapsto \dfrac{u-x}{t}$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ (polynôme), ainsi que γ.

Par composée, k_x est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

$u \mapsto \dfrac{2t}{3}$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ (fonction constante).

Par produit, g est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

$$\forall u \in \mathbf{R},\ g'(u) = \frac{2t}{3}k_x'(u)$$

$$= \frac{2t}{3} \times \frac{1}{t} \times \gamma'\left(\frac{u-x}{t}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \times \gamma'\left(\frac{u-x}{t}\right)$$

D'où $\forall u \in \mathbf{R},\ \big|g'(u)\big| = \dfrac{2}{3} \times \left|\gamma'\left(\dfrac{u-x}{t}\right)\right|.$

Or, $\forall y \in \mathbf{R},\ \big|\gamma'(y)\big| \leq \dfrac{3}{2}$ donc $\forall u \in \mathbf{R},\ \left|\gamma'\left(\dfrac{u-x}{t}\right)\right| \leq \dfrac{3}{2}.$

Ainsi, $\forall u \in \mathbf{R},\ \big|g'(u)\big| \leq 1$, ce qui prouve que $g \in W$.

• Comme $g \in W$, on a d'après l'hypothèse faite par l'énoncé :

$\big|E\big(g(X)\big) - E\big(g(N)\big)\big| \leq M_X$, c'est-à-dire : $\left|E\left(\dfrac{2t}{3}k_x(X)\right) - E\big(\dfrac{2t}{3}k_x(N)\big)\right| \leq M_X.$

Puis, par linéarité de l'espérance : $\left|\dfrac{2t}{3}\left(E\big(k_x(X)\big) - E\big(k_x(N)\big)\right)\right| \leq M_X.$

Comme $\dfrac{2t}{3} > 0$, cela revient à : $\big|E\big(k_x(X)\big) - E\big(k_x(N)\big)\big| \leq \dfrac{3}{2t}M_X.$

Enfin, comme $E\big(k_x(X)\big) - E\big(k_x(N)\big) \leq \big|E\big(k_x(X)\big) - E\big(k_x(N)\big)\big|$, on a par recollement d'inégalités :

$E\big(k_x(X)\big) - E\big(k_x(N)\big) \leq \dfrac{3}{2t}M_X \quad (1)$

Par ailleurs, d'après la question 9)c), on a :

$E\big(k_x(N)\big) - E\big(h_x(N)\big) = \displaystyle\int_x^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du = \int_x^{x+t} \gamma\left(\frac{u-x}{t}\right)\varphi(u)du$

$= \displaystyle\int_x^{x+t} \gamma\left(\frac{u-x}{t}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$

$\forall u \in \mathbf{R},\ \gamma\left(\dfrac{u-x}{t}\right) \leq 1$ et $e^{-\frac{u^2}{2}} \leq 1$ donc $\gamma\left(\dfrac{u-x}{t}\right)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}.$

En intégrant entre les bornes croissantes x et $x+t$, on a :

$\displaystyle\int_x^{x+t} \gamma\left(\frac{u-x}{t}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du \leq \int_x^{x+t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}du$, c'est-à-dire :

$\displaystyle\int_x^{x+t} \gamma\left(\frac{u-x}{t}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big((x+t)-x\big)$, ce qui mène à :

$E\big(k_x(N)\big) - E\big(h_x(N)\big) \leq \dfrac{t}{\sqrt{2\pi}} \quad (2)$

En ajoutant (1) et (2) et compte tenu de la question 9)b), on conclut que

$$E\big(h_x(X)\big) - E\big(h_x(N)\big) \leq \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{\sqrt{2\pi}}.$$

Enfin, comme $2\pi \geq 4$, on a $\sqrt{2\pi} \geq 2$, puis $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{t}{\sqrt{2\pi}} \leq \dfrac{t}{2}$.

$$\text{D'où } E\big(h_x(X)\big) - E\big(h_x(N)\big) \leq \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{2}.$$

10)• La fonction $b : t \mapsto \dfrac{3}{2t}M_X + \dfrac{t}{2}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables.

$\forall t > 0,\ b'(t) = -\dfrac{3}{2t^2}M_X + \dfrac{1}{2} = \dfrac{t^2 - 3M_X}{2t^2}.$

$b'(t)$ est du signe du numérateur dont les racines sont $\pm\sqrt{3M_X}$.

D'où le tableau de variations de b :

t	0		$\sqrt{3M_X}$		$+\infty$
$b'(t)$		$-$	0	$+$	
$b(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3M_X}$	$\nearrow$	$+\infty$

• Par ailleurs, la question 9)d) donne :

$-\left(\dfrac{3}{2t}M_X + \dfrac{t}{2}\right) \leq E\big(h_x(X)\big) - E\big(h_x(N)\big) \leq \dfrac{3}{2t}M_X + \dfrac{t}{2}$, ce qui revient à :

$\big|E\big(h_x(X)\big) - E\big(h_x(N)\big)\big| \leq \dfrac{3}{2t}M_X + \dfrac{t}{2}$, soit $\big|E\big(h_x(X)\big) - E\big(h_x(N)\big)\big| \leq b(t).$

Cette inégalité étant vraie pour tout réel $t > 0$, on peut très bien prendre $t = \sqrt{3M_X}$, ce qui donne, grâce à l'étude de b :

$$\left|E\big(h_x(X)\big) - E\big(h_x(N)\big)\right| \leq \sqrt{3M_X}.$$

• Enfin, d'après la question 6), on a : $E\big(h_x(X)\big) = F_X(x)$.

On a de même $E\big(h_x(N)\big) = F_N(x) = \Phi(x)$.

Ainsi, en reportant dans l'inégalité ci-dessus, on a bien :

$$d_X(x) \leq \sqrt{3M_X} \quad (R_2)$$

Partie III

11)a)La réponse est : echantillon=stats['salaire']

11)b)programme :

```
import numpy as np
a=float(input('a='))
n=len(echantillon)
h=1/np.sqrt(n)
C=0
for i in range(n):
    if echantillon[i]>a and echantillon[i]<=a+h:
        C+=1
print(C/(2*n*h))
```

Remarque
Il y a une petite erreur dans le programme de l'énoncé. Ce n'est pas la commande *count*, mais la commande *len* qu'il faut mettre.

12)• Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons Y_i la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) \in]a - h_n, a + h_n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$Y_i(\Omega) = \{0, 1\}$ donc Y_i suit une loi de Bernoulli. Son paramètre est :

$$\begin{aligned} P(Y_i = 1) &= P\big(\{\omega \in \Omega \mid Y_i(\omega) = 1\}\big) \\ &= P\big(\{\omega \in \Omega \mid X_i(\omega) \in]a - h_n, a + h_n]\}\big) \\ &= P(a - h_n < X_i \leq a + h_n) \\ &= P(a - h_n < X \leq a + h_n) \quad \text{car } X_i \text{ a même loi que } X \\ &= F(a + h_n) - F(a - h_n) \quad \text{car } X \text{ est à densité.} \end{aligned}$$

Par construction, on a : $C_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Les variables aléatoires Y_1, ..., Y_n sont indépendantes (car X_1, ..., X_n le sont) et suivent toutes la même loi de Bernoulli, de paramètre $F(a + h_n) - F(a - h_n)$.
Donc $C_n \hookrightarrow \mathscr{B}\big(n, p_n\big)$ avec $p_n = F(a + h_n) - F(a - h_n)$.

• Le cours donne $E(C_n) = np_n$ et $V(C_n) = np_n(1 - p_n)$.
Par linéarité de l'espérance, on a :
$E(f_n) = \dfrac{1}{2nh_n} E(C_n) = \dfrac{p_n}{2h_n} = \dfrac{F(a + h_n) - F(a - h_n)}{2h_n}$.

13)a)Comme f est continue en a, alors F est dérivable en a.
Ainsi, on a : $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = F'(a)$.
Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} h_n = 0$, alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (a + h_n) = a$.
Par composition de limites, on a : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{F(a + h_n) - F(a)}{(a + h_n) - a} = F'(a)$,

c'est-à-dire : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{F(a+h_n)-F(a)}{h_n} = f(a) \qquad (1)$

De même, on a $\lim_{n\to+\infty}(a-h_n)=0$, ce qui donne de la même façon :

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{F(a-h_n)-F(a)}{-h_n} = f(a)$,

ou encore : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{F(a)-F(a-h_n)}{h_n} = f(a) \qquad (2)$

Par somme de (1) et (2), on déduit que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{F(a+h_n)-F(a-h_n)}{h_n} = 2f(a)$.

Puis, en divisant par deux et compte tenu de la question 12) :

$$\lim_{n\to+\infty} E(f_n) = f(a).$$

b)Comme C_n admet une variance et que f_n est une fonction affine de C_n, alors f_n admet une variance donnée par :

$V(f_n) = \left(\dfrac{1}{2nh_n}\right)^2 V(C_n) = \dfrac{np_n(1-p_n)}{4n^2h_n^2} = \dfrac{p_n(1-p_n)}{4nh_n^2} = \dfrac{p_n}{2h_n} \times \dfrac{1-p_n}{2nh_n} \quad (1)$

D'après les questions 12) et 13)a), on a :

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{p_n}{2h_n} = \lim_{n\to+\infty} E(f_n) = f(a) \qquad (2)$

Comme $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$, on a par continuité de F en a :

$\lim_{n\to+\infty} F(a+h_n) - F(a-h_n) = F(a) - F(a) = 0$, soit $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}(1-p_n) = 1 \qquad (3)$

Enfin, par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} nh_n = +\infty \qquad (4)$

De (1), (2), (3) et (4), on déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} V(f_n) = 0.$$

14)a)Comme F est de classe C^2 au voisinage de a, elle admet un DL à l'ordre 2 en a donné par :

$F(x) \underset{x\to a}{=} F(a) + F'(a)(x-a) + \dfrac{F''(a)}{2}(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right)$

Comme $\lim_{n\to+\infty}(a+h_n) = a$, on peut remplacer x par $a+h_n$, ce qui donne :

$F(a+h_n) \underset{x\to a}{=} F(a) + F'(a)h_n + \dfrac{F''(a)}{2}h_n^2 + o\left(h_n^2\right)$, c'est-à-dire :

$F(a+h_n) \underset{n\to+\infty}{=} F(a) + f(a)h_n + \dfrac{f'(a)}{2}h_n^2 + o\left(h_n^2\right) \qquad (1)$

Avec le même raisonnement, en remplaçant x par $a-h_n$, on obtient :

$F(a-h_n) \underset{n\to+\infty}{=} F(a) - f(a)h_n + \dfrac{f'(a)}{2}h_n^2 + o\left(h_n^2\right) \qquad (2)$

Par différence de (1) et (2), on déduit :

$F(a+h_n)-F(a-h_n)=2f(a)h_n+o\left(h_n^2\right)$, c'est-à-dire :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{=} 2h_nf(a)+o\left(h_n^2\right).$$

Et comme $\theta_n=\sqrt{2h_nf(a)}$, on a : $\theta_n^2=2h_nf(a)$, d'où :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{=} \theta_n^2+o\left(h_n^2\right).$$

b)• On peut écrire : $p_n=2h_nf(a)+h_n^2\epsilon(n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\epsilon(n)=0$.

$2h_nf(a)>0$ et $\dfrac{p_n}{2h_nf(a)}=\dfrac{2h_nf(a)+h_n^2\epsilon(n)}{2h_nf(a)}=1+\dfrac{h_n\epsilon(n)}{2f(a)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\epsilon(n)=0$.

$$\text{Donc } p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2h_nf(a).$$

• Par produit, on déduit alors : $np_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2nh_nf(a)$.

Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty}nh_n=+\infty$ et $f(a)>0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}2nh_nf(a)=+\infty$.

$$\text{Ainsi, } \lim_{n\to+\infty}np_n=+\infty.$$

c)• $$\begin{aligned}\hat{f}_n&=\frac{\theta_n\sqrt{n}}{f(a)}\left(f_n-f(a)\right)\\&=\frac{\theta_n\sqrt{n}}{f(a)}\left(\frac{C_n}{2nh_n}-f(a)\right)\\&=\frac{\theta_n\sqrt{n}}{n\times 2h_nf(a)}\left(C_n-n\times 2h_nf(a)\right)\\&=\frac{\theta_n\sqrt{n}}{n\theta_n^2}\left(\sigma_nD_n+np_n-n\theta_n^2\right)\\&=\frac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}}D_n+\sqrt{n}\frac{p_n}{\theta_n}-\sqrt{n}\theta_n\\&=\frac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}}D_n+\sqrt{n}\left(\frac{p_n}{\theta_n}-\theta_n\right).\end{aligned}$$

• On a déjà vu que $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=0$, limite qu'on peut retrouver grâce à l'équivalent trouvé dans la question 14)b).

Donc $1-p_n\underset{n\to+\infty}{\sim}1$, puis $np_n(1-p_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}np_n$.

En passant à la racine carrée : $\sigma_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{np_n}$ (1)

Par ailleurs, la question 14)b) donne : $2h_nf(a)\underset{n\to+\infty}{\sim}p_n$, puis par produit :

$2nh_nf(a)\underset{n\to+\infty}{\sim}np_n$.

En passant à la racine carrée : $\sqrt{2nh_nf(a)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{np_n}$ (2)

De (1) et (2), on déduit : $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2nh_nf(a)}$ ou encore $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \theta_n\sqrt{n}$.

$$\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}} = 1.$$

- $$\begin{aligned}\sqrt{n}\left(\frac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right) &= \sqrt{n} \times \frac{p_n - \theta_n^2}{\theta_n} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n} \times \frac{o(h_n^2)}{\theta_n} \quad \text{d'après 14)a)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n} \times \frac{h_n^2\epsilon(n)}{\sqrt{2h_nf(a)}} \quad \text{avec } \lim_{n\to+\infty} \epsilon(n) = 0 \\ &= \frac{\sqrt{nh_n^3} \times \epsilon(n)}{\sqrt{2f(a)}}\end{aligned}$$

Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} nh_n^3 = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{nh_n^3} = 0$, et $\lim_{n\to+\infty} \epsilon(n) = 0$.
Par produit, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{nh_n^3} \times \epsilon(n) = 0$.

$$\text{Donc} \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\frac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right) = 0.$$

15)Soit $\alpha \in]0,1[$.
t_α est le quantile d'ordre $1 - \dfrac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathscr{N}(0,1)$ signifie que $\Phi(t_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
Comme $\alpha < 1$, on a : $\Phi(t_\alpha) > \dfrac{1}{2} = \Phi(0)$. Donc $t_\alpha > 0$ par stricte croissance de Φ.

a)$$\begin{aligned}P\big(-t_\alpha \leq \hat{f}_n \leq t_\alpha\big) &= P\left(-t_\alpha \leq \frac{\theta_n\sqrt{n}}{f(a)}\big(f_n - f(a)\big) \leq t_\alpha\right) \\ &= P\left(-t_\alpha \leq \frac{\sqrt{2h_nf(a)}\sqrt{n}}{f(a)}\big(f_n - f(a)\big) \leq t_\alpha\right) \\ &= P\left(\left|\frac{\sqrt{2h_nf(a)}\sqrt{n}}{f(a)}\big(f_n - f(a)\big)\right| \leq t_\alpha\right) \\ &= P\left(\left(\frac{\sqrt{2h_nf(a)}\sqrt{n}}{f(a)}\big(f_n - f(a)\big)\right)^2 \leq t_\alpha^2\right) \\ &= P\left(\frac{2nh_n}{f(a)}\big(f_n - f(a)\big)^2 \leq \eta_\alpha\right) \\ &= P\left(\big(f_n - f(a)\big)^2 \leq \eta_\alpha \frac{f(a)}{2nh_n}\right) \\ &= P\left(f_n^2 - 2f(a)f_n + f_n^2 - \eta_\alpha \frac{f(a)}{2nh_n} \leq 0\right) \\ &= P\left(f(a)^2 - \left(2f_n + \frac{\eta_\alpha}{2nh_n}\right) f(a) + f_n^2 \leq 0\right).\end{aligned}$$

Enfin, par hypothèse de l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} P\big(-t_\alpha \leq \hat{f}_n \leq t_\alpha\big) &= \Phi\big(t_\alpha\big) - \Phi\big(-t_\alpha\big)\\
&= \Phi\big(t_\alpha\big) - \big(1-\Phi\big(t_\alpha\big)\big)\\
&= 2\Phi\big(t_\alpha\big) - 1\\
&= 2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) - 1\\
&= 1-\alpha.
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(f(a)^2 - \left(2f_n + \frac{\eta_\alpha}{2nh_n}\right)f(a) + f_n^2 \leq 0\right) = 1-\alpha.$

b)$f(a) \in \left[f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{4nh_n} - \Delta_n, f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{4nh_n} + \Delta_n\right]$

$\iff f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{4nh_n} - \Delta_n \leq f(a) \leq f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{4nh_n} + \Delta_n$

$\iff -\Delta_n \leq f(a) - \left(f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right) \leq \Delta_n$

$\iff \left(f(a) - \left(f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right)\right)^2 \leq \Delta_n^2$

$\iff f(a)^2 - 2f(a)\left(f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right) + \left(f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right)^2 \leq \left(f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right)^2 - f_n^2$

$\iff f(a)^2 - \left(2f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{2nh_n}\right)f(a) + f_n^2 \leq 0.$

On conclut que :

$P\left(f(a) \in \left[f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{4nh_n} - \Delta_n, f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{4nh_n} + \Delta_n\right]\right) = P\left(f(a)^2 - \left(2f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{2nh_n}\right)f(a) + f_n^2 \leq 0\right)$

Puis, en passant à la limite et en utilisant la question 15)a) :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(f(a) \in \left[f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n} - \Delta_n, f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n} + \Delta_n\right]\right) = 1-\alpha.$

Remarque

$\left[f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{4nh_n} - \Delta_n, f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{4nh_n} + \Delta_n\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de $f(a)$ au niveau de confiance $1-\alpha$.

Partie IV

16)a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k E\big(f'(S_n) - f'(Y_k)\big) + \sum_{k=1}^{n} E\left(X_k^2 f'(Y_k)\right)$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k E\big(f'(S_n)\big) - v_k E\big(f'(Y_k)\big) + \sum_{k=1}^{n} E\left(X_k^2 f'(Y_k)\right)$ par linéarité de l'espérance

$= E\big(f'(S_n)\big)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k\right) - \sum_{k=1}^{n} v_k E\big(f'(Y_k)\big) + \sum_{k=1}^{n} E\left(X_k^2 f'(Y_k)\right)$

$= E\big(f'(S_n)\big) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E\big(X_k^2\big) E\big(f'(Y_k)\big) + \sum_{k=1}^{n} E\left(X_k^2 f'(Y_k)\right)$ car $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = 1$

$= E\big(f'(S_n)\big) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[E\left(X_k^2 f'(Y_k)\right) - E\big(X_k^2\big)E\big(f'(Y_k)\big)\right].$

Or, X_1, ..., X_n sont indépendantes. D'après le lemme des coalitions, X_k est indépendante de toute fonction de X_1,..., X_{k-1}, X_{k+1}, ..., X_n, comme par exemple Y_k.
Comme X_k et Y_k sont indépendantes, le lemme des coalitions assure de nouveau l'indépendance de X_k^2 avec toute fonction de Y_k, comme par exemple $f'(Y_k)$.
Ainsi, $E\left(X_k^2 f'(Y_k)\right) = E\big(X_k^2\big)E\big(f'(Y_k)\big)$, ce qui permet de conclure que :

$$\sum_{k=1}^{n} v_k E\big(f'(S_n) - f'(Y_k)\big) + \sum_{k=1}^{n} E\left(X_k^2 f'(Y_k)\right) = E\big(f'(S_n)\big).$$

b)• $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E\left[X_k\big(f(S_n) - f(Y_k)\big)\right] = \sum_{k=1}^{n} E\big(X_k f(S_n) - X_k f(Y_k)\big)$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n} \left[E\big(X_k f(S_n)\big) - E\big(X_k f(Y_k)\big)\right]$ par linéarité de l'espérance.

Grâce au lemme des coalitions, X_k et $f(Y_k)$ sont indépendantes, ce qui entraîne l'égalité : $E\big(X_k f(Y_k)\big) = E(X_k)E\big(f(Y_k)\big)$.
En reportant dans la somme, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} E\left[X_k\big(f(S_n) - f(Y_k)\big)\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[E\big(X_k f(S_n)\big) - \underbrace{E(X_k)}_{=0} E\big(f(Y_k)\big)\right] \quad \text{car } X_k \text{ est centrée}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\big(X_k f(S_n)\big)$$

• Par linéarité de l'espérance, on a enfin :

$$\sum_{k=1}^{n} E\big(X_k f(S_n)\big) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k f(S_n)\right) = E\left(f(S_n)\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = E\big(S_n f(S_n)\big).$$

c)En utilisant la linéarité de l'espérance, puis les questions 16)a) et 16)b), on a :

$E\big(f'(S_n) - S_n f(S_n)\big)$

$= E\big(f'(S_n)\big) - E\big(S_n f(S_n)\big)$

$= \sum_{k=1}^{n} v_k E\big(f'(S_n) - f'(Y_k)\big) + \sum_{k=1}^{n} E\left(X_k^2 f'(Y_k)\right) - \sum_{k=1}^{n} E\left[X_k\big(f(S_n) - f(Y_k)\big)\right]$

$= \sum_{k=1}^{n} v_k E\big(f'(S_n) - f'(Y_k)\big) + \sum_{k=1}^{n} \left[E\left(X_k^2 f'(Y_k)\right) - E\left[X_k\big(f(S_n) - f(Y_k)\big)\right]\right]$

$= \sum_{k=1}^{n} v_k E\big(f'(S_n) - f'(Y_k)\big) + \sum_{k=1}^{n} E\left[X_k^2 f'(Y_k) - X_k\big(f(S_n) - f(Y_k)\big)\right]$

$= \sum_{k=1}^{n} v_k E\big(f'(S_n) - f'(Y_k)\big) + \sum_{k=1}^{n} E\left(X_k\left[X_k f'(Y_k) - \big(f(S_n) - f(Y_k)\big)\right]\right).$

17)a) $\displaystyle\int_0^1 b\big(f'(a) - f'(a+tb)\big)dt = \int_0^1 \big(bf'(a) - bf'(a+tb)\big)dt$

$$\begin{aligned} &= \big[bf'(a)t - f(a+tb)\big]_0^1 \\ &= bf'(a) - f(a+b) + f(a) \\ &= bf'(a) - \big(f(a+b) - f(a)\big). \end{aligned}$$

b)De la question précédente, on déduit grâce à l'inégalité triangulaire :

$\left|bf'(a) - \big(f(a+b) - f(a)\big)\right| \le \displaystyle\int_0^1 \left|b\big(f'(a) - f'(a+tb)\big)\right| dt$, ou encore :

$\left|bf'(a) - \big(f(a+b) - f(a)\big)\right| \le |b| \displaystyle\int_0^1 |f'(a) - f'(a+tb)|\, dt \quad (1)$

f' est dérivable sur $\mathbf{R}$ car f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R},\ |f''(x)| \le 2$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$\forall t \in [0,1],\ |f'(a) - f'(a+tb)| \le 2\big|a - (a+tb)\big|$, c'est-à-dire :

$|f'(a) - f'(a+tb)| \le 2|b||t|$.

En intégrant cette inégalité entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :

$\displaystyle\int_0^1 |f'(a) - f'(a+tb)|\, dt \le \int_0^1 2|b||t|dt$

avec $\displaystyle\int_0^1 2|b||t|dt = 2|b|\int_0^1 |t|dt = 2|b|\int_0^1 tdt = 2|b|\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = |b|$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 |f'(a) - f'(a+tb)|\, dt \le |b|$.

En multipliant membre à membre par $|b|$ et compte tenu que $|b|^2 = b^2$, on a :

$|b| \displaystyle\int_0^1 |f'(a) - f'(a+tb)|\, dt \le b^2 \quad (2)$

En recollant (1) et (2), on conclut que :

$$\left|bf'(a) - \big(f(a+b) - f(a)\big)\right| \le b^2.$$

c)En appliquant la valeur absolue dans chaque membre de l'égalité 16)c), puis en utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left|E\big(f'(S_n)-S_nf(S_n)\big)\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left|v_kE\big(f'(S_n)-f'(Y_k)\big)\right|$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left|E\big(X_k\left[X_kf'(Y_k)-\big(f(S_n)-f(Y_k)\big)\right]\big)\right| \quad (*)$$

Majorons maintenant chacune des sommes.

• L'inégalité des accroissements finis donne : $\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ \left|f'(x)-f'(y)\right|\leq 2|x-y|$.
En l'appliquant avec $x=S_n(\omega)$ et $y=Y_k(\omega)$, on a pour tout $\omega\in\Omega$:

$\left|f'(S_n(\omega))-f'(Y_k(\omega))\right|\leq 2\left|S_n(\omega)-Y_k(\omega)\right|$, c'est-à-dire :

$\left|f'(S_n(\omega))-f'(Y_k(\omega))\right|\leq 2\left|X_k(\omega)\right|$, soit $\left|f'(S_n)(\omega)-f'(Y_k)(\omega)\right|\leq 2\left|X_k(\omega)\right|$.

Entre variables aléatoires, on a donc l'inégalité : $\left|f'(S_n)-f'(Y_k)\right|\leq 2\left|X_k\right|$.

Par croissance de l'espérance, on déduit : $E\left(\left|f'(S_n)-f'(Y_k)\right|\right)\leq E\left(2\left|X_k\right|\right)$, puis $E\left(\left|f'(S_n)-f'(Y_k)\right|\right)\leq 2E\left(\left|X_k\right|\right)$.

Or [1], $\left|E\big(f'(S_n)-f'(Y_k)\big)\right|\leq E\left(\left|f'(S_n)-f'(Y_k)\right|\right)$.

Par recollement : $\left|E\big(f'(S_n)-f'(Y_k)\big)\right|\leq 2E\left(\left|X_k\right|\right)$.

En multipliant membre à membre par $|v_k|$, puis en tenant compte que $v_k=E(X_k^2)\geq 0$, on déduit :

$\left|v_kE\big(f'(S_n)-f'(Y_k)\big)\right| \leq 2v_kE\left(\left|X_k\right|\right)$, puis par sommation et linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}\left|v_kE\big(f'(S_n)-f'(Y_k)\big)\right|\leq 2\sum_{k=1}^{n}v_kE\left(\left|X_k\right|\right) \quad (1)$$

• La question 17)b) avec $a=Y_k(\omega)$ et $b=X_k(\omega)$ donne pour tout $\omega\in\Omega$:

$\left|X_k(\omega)f'(Y_k(\omega))-\Big(f\big((X_k(\omega)+Y_k(\omega))\big)-f(Y_k(\omega))\Big)\right|\leq X_k(\omega)^2$, c'est-à-dire :

$\left|X_k(\omega)f'(Y_k)(\omega)-\big(f(S_n)(\omega)-f(Y_k)(\omega)\right|\leq X_k^2(\omega)$.

Puis, en multipliant par $\left|X_k(\omega)\right|\geq 0$:

$\left|X_k(\omega)\left[X_k(\omega)f'(Y_k)(\omega)-\big(f(S_n)(\omega)-f(Y_k)(\omega)\big)\right]\right|\leq\left|X_k^3(\omega)\right|$.

Entre variables aléatoires, on a donc : $\left|X_k\left[X_kf'(Y_k)-\big(f(S_n)-f(Y_k)\big)\right]\right|\leq\left|X_k\right|^3$.
Par croissance de l'espérance, on déduit :

$E\left(\left|X_k\left[X_kf'(Y_k)-\big(f(S_n)-f(Y_k)\big)\right]\right|\right)\leq E\left(\left|X_k\right|^3\right)$.

En utilisant la note de bas de page, on a :

$\left|E\left(X_k\left[X_kf'(Y_k)-\big(f(S_n)-f(Y_k)\big)\right]\right)\right|\leq E\left(\left|X_k\left[X_kf'(Y_k)-\big(f(S_n)-f(Y_k)\big)\right]\right|\right)$.

1. On utilise que si X est une variable aléatoire, l'inégalité $-|X|\leq X\leq|X|$ devient par croissance de l'espérance : $E\big(-|X|\big)\leq E(X)\leq E\big(|X|\big)$, puis $-E\big(|X|\big)\leq E(X)\leq E\big(|X|\big)$, c'est-à-dire $\left|E(X)\right|\leq E\big(|X|\big)$.

Par recollement : $\left|E\left(X_k\left[X_k f'(Y_k)-\left(f(S_n)-f(Y_k)\right)\right]\right)\right| \leq E\left(\left|X_k\right|^3\right)$.

Par sommation, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\left|E\big(X_k\left[X_k f'(Y_k)-\left(f(S_n)-f(Y_k)\right)\right]\big)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} E\left(\left|X_k\right|^3\right) \quad (2)$$

De $(*)$, (1) et (2), on conclut que :

$$\left|E\big(f'(S_n)-S_n f(S_n)\big)\right| \leq 2\sum_{k=1}^{n} v_k E\left(\left|X_k\right|\right)+\sum_{k=1}^{n} E\left(\left|X_k\right|^3\right) \quad (2).$$

c)Soit $h \in W$.
On lui associe par la transformation de Stein la fonction f_h de la partie I.
D'après les questions 3)b), 4)b) et 5)c), on sait que :
– f_h est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$,
– $\forall x \in \mathbf{R}, \left|f_h(x)\right| \leq 1$,
– $\forall x \in \mathbf{R}, \left|f_h''(x)\right| \leq 2$.

f_h vérifie les hypothèses de la partie IV. La question 17)c) donne alors :
$\left|E\big(f_h'(S_n)-S_n f_h(S_n)\big)\right| \leq 2\sum_{k=1}^{n} v_k E\left(\left|X_k\right|\right)+\sum_{k=1}^{n} E\left(\left|X_k\right|^3\right) \quad (1)$

Par ailleurs, la question 3)c) appliquée pour $X \to S_n$ donne :
$\left|E\big(h(S_n)\big)-E\big(h(N)\big)\right|=\left|E\big(f_h'(S_n)-S_n f_h(S_n)\big)\right| \quad (2)$
De (1) et (2), on déduit :
$\left|E\big(h(S_n)\big)-E\big(h(N)\big)\right| \leq \underbrace{2\sum_{k=1}^{n} v_k E\left(\left|X_k\right|\right)+\sum_{k=1}^{n} E\left(\left|X_k\right|^3\right)}_{M_{S_n}}.$

On est alors dans le cadre d'application de la question 10) et on conclut que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ d_{S_n}(x) \leq \sqrt{3\left(2\sum_{k=1}^{n} v_k E\left(\left|X_k\right|\right)+\sum_{k=1}^{n} E\left(\left|X_k\right|^3\right)\right)} \quad (R_3)$$

18)a)• Vérifions qu'on peut appliquer l'inégalité (R_3) à la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\geq 1}$ définies par $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ X_k=\dfrac{Z_k-E(Z_k)}{\sigma\sqrt{n}}$.

– Comme X_k est une fonction de Z_k et que $(Z_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, $(X_k)_{k\geq 1}$ l'est également d'après le lemme des coalitions.

– $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ E\big(X_k\big)=E\left(\dfrac{Z_k-E(Z_k)}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(E(Z_k)-E(Z_k)\right)=0.$

Donc Z_k est centrée.
– Enfin, pour tout $\forall k \in \mathbf{N}^*$, on a :

$v_k = E(X_k^2) = E\left[\left(\dfrac{Z_k - E(Z_k)}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right] = \dfrac{1}{\sigma^2 n}E\left[\big(Z_k - E(Z_k)\big)^2\right] = \dfrac{1}{\sigma^2 n} \times s_2 = \dfrac{1}{n}.$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = 1$.

• Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a :

$E(|X_k|) = E\left(\dfrac{|Z_k - E(Z_k)|}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}}E\left[|Z_k - E(Z_k)|\right] = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}} \times s_1 = \dfrac{s_1}{\sigma\sqrt{n}}.$

$E(|X_k|^3) = E\left(\dfrac{|Z_k - E(Z_k)|^3}{\sigma^3 n\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{\sigma^3 n\sqrt{n}}E\left[|Z_k - E(Z_k)|^3\right] = \dfrac{s_3}{\sigma^3 n\sqrt{n}}.$

• L'inégalité (R_3) s'applique et donne pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$d_{S_n}(x) \leq \sqrt{3\left(2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n} \times \dfrac{s_1}{\sigma\sqrt{n}} + \sum_{k=1}^{n}\dfrac{s_3}{\sigma^3 n\sqrt{n}}\right)}$, c'est-à-dire :

$d_{S_n}(x) \leq \sqrt{3\left(\dfrac{2s_1}{\sigma\sqrt{n}} + \dfrac{s_3}{\sigma^3\sqrt{n}}\right)}$ ou encore

$$d_{S_n}(x) \leq \sqrt{3 \times \frac{2\sigma^2 s_1 + s_3}{\sigma^3\sqrt{n}}}.$$

b)• Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $\delta_n = \sqrt{3 \times \dfrac{2\sigma^2 s_1 + s_3}{\sigma^3\sqrt{n}}}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R},\ d_{S_n}(x) \leq \delta_n$ d'après 18)a).

Donc $(S_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément en loi vers N.

• $(S_n)_{n\geq 1}$ converge donc en loi vers N, résultat qu'on pouvait prouver directement.

En effet, $(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi.

Posons $S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$ la variable aléatoire centrée réduite associée à S_n.

D'après le théorème de la limite centrée, $(S_n^*)_{n\geq 1}$ converge donc en loi vers N.

Or, $E(S_n) = E\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 0$ car X_k est centrée.

$V(S_n) = V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$ par indépendance,

avec $V(X_k) = \left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 V(Z_k) = \dfrac{1}{\sigma^2 n} \times s_2 = \dfrac{1}{n}$.

Donc $V(S_n) = 1$.

Ainsi, $S_n^* = S_n$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ converge donc en loi vers N.

19)a)• $\left|X_k\right| = \left|\dfrac{Z_k - p_n}{\sigma_n}\right|$ avec $Z_k(\Omega) = \{0, 1\}$.

X_k est discrète finie. Elle admet une espérance donnée par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E\left(\left|X_k\right|\right) &= \left|\frac{1-p_n}{\sigma_n}\right| \times P(Z_k = 1) + \left|\frac{0-p_n}{\sigma_n}\right| \times P(Z_k = 0)\\
&= \frac{1-p_n}{\sigma_n} \times p_n + \frac{p_n}{\sigma_n} \times (1-p_n)\\
&= \frac{2p_n(1-p_n)}{\sigma_n}\\
&= \frac{2np_n(1-p_n)}{n\sigma_n}\\
&= \frac{2\sigma_n^2}{n\sigma_n}\\
&= \frac{2\sigma_n}{n}.
\end{aligned}$$

• Toujours grâce au théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
E\left(\left|X_k\right|^3\right) &= \left|\frac{1-p_n}{\sigma_n}\right|^3 \times P(Z_k = 1) + \left|\frac{0-p_n}{\sigma_n}\right|^3 \times P(Z_k = 0)\\
&= \frac{(1-p_n)^3}{\sigma_n^3} \times p_n + \frac{p_n^3}{\sigma_n^3} \times (1-p_n)\\
&= \frac{(1-p_n)p_n\big((1-p_n)^2 + p_n^2\big)}{\sigma_n^3}\\
&= \frac{(1-p_n)p_n\big((1-p_n)^2 + p_n^2\big)}{np_n(1-p_n)\sigma_n}\\
&= \frac{(1-p_n)^2 + p_n^2}{n\sigma_n}.
\end{aligned}$$

Or, $0 \leq p_n \leq 1$ donc $p_n^2 \leq 1$ et $(1-p_n)^2 \leq 1$.

Finalement, $E\left(\left|X_k\right|^3\right) \leq \dfrac{2}{n\sigma_n}$.

b)• Vérifions qu'on peut appliquer l'inégalité (R_3) à la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\geq 1}$ définies par $\forall k \in [\![1, n]\!],\ X_k = \dfrac{Z_k - p_n}{\sigma_n}$.

– Comme X_k est une fonction de Z_k et que $(Z_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, $(X_k)_{k\geq 1}$ l'est également d'après le lemme des coalitions.

– $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ E\big(X_k\big) = E\left(\dfrac{Z_k - p_n}{\sigma_n}\right) = \dfrac{1}{\sigma_n}\big(E(Z_k) - p_n\big) = 0$.

Donc Z_k est centrée.

– Enfin, pour tout $\forall k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$v_k = E\left[\left(\frac{Z_k - p_n}{\sigma_n}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma_n^2} E\left[\big(Z_k - E(Z_k)\big)^2\right] = \frac{V(Z_k)}{\sigma_n^2} = \frac{p_n(1-p_n)}{np_n(1-p_n)} = \frac{1}{n}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = 1$.

• Pour tout $\forall k \in [\![1, n]\!]$, on a d'après la question 19)a) :
$E\big(|X_k|\big) = \dfrac{2\sigma_n}{n}$ et $E\big(|X_k|^3\big) \leq \dfrac{2}{n\sigma_n}$.
On déduit :
$$2\sum_{k=1}^{n} v_k E\big(|X_k|\big) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{2\sigma_n}{n} = \frac{4\sigma_n}{n} \quad (1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} E\big(|X_k|^3\big) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n\sigma_n}, \text{ puis } \sum_{k=1}^{n} E\big(|X_k|^3\big) \leq \frac{2}{\sigma_n} \quad (2)$$
La somme de (1) et (2) donne alors :
$$2\sum_{k=1}^{n} v_k E\big(|X_k|\big) + \sum_{k=1}^{n} E\big(|X_k|^3\big) \leq \frac{4\sigma_n}{n} + \frac{2}{\sigma_n}, \text{ puis :}$$
$$3\left(2\sum_{k=1}^{n} v_k E\big(|X_k|\big) + \sum_{k=1}^{n} E\big(|X_k|^3\big)\right) \leq 3\left(\frac{4\sigma_n}{n} + \frac{2}{\sigma_n}\right)$$
La racine carrée étant croissante sur $\mathbf{R}_+$, on a :
$$\sqrt{3\left(2\sum_{k=1}^{n} v_k E\big(|X_k|\big) + \sum_{k=1}^{n} E\big(|X_k|^3\big)\right)} \leq \sqrt{3\left(\frac{4\sigma_n}{n} + \frac{2}{\sigma_n}\right)}$$
En recollant avec l'inégalité (R_3), on conclut que :
$$d_{S_n}(x) \leq \sqrt{3\left(\frac{4\sigma_n}{n} + \frac{2}{\sigma_n}\right)}.$$
Il reste à arranger le membre de droite en, écrivant :
$$\sqrt{3\left(\frac{4\sigma_n}{n} + \frac{2}{\sigma_n}\right)} = \sqrt{3\left(\frac{4\sigma_n}{n} + \frac{4}{2\sigma_n}\right)} = \sqrt{3 \times 4\left(\frac{\sigma_n}{n} + \frac{1}{2\sigma_n}\right)} = 2\sqrt{3\left(\frac{\sigma_n}{n} + \frac{1}{2\sigma_n}\right)}.$$
$$\text{Donc } \forall x \in \mathbf{R},\ d_{S_n}(x) \leq 2\sqrt{3\left(\frac{\sigma_n}{n} + \frac{1}{2\sigma_n}\right)}.$$

c)Soit $T_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = +\infty$.

• En se référant à la question 19) avec ce même p_n, on a :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k - p_n}{\sigma_n} = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{n} \big(Z_k - p_n\big) = \frac{1}{\sigma_n}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right) - \frac{np_n}{\sigma_n}.$$
S_n a même loi que $\dfrac{T_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}$. En effet :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbf{R},\ P(S_n \leq x) &= P(\sigma_n S_n \leq \sigma_n x)\\ &= P\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k - np_n \leq \sigma_n x\right)\\ &= P\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k \leq np_n + \sigma_n x\right).\end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=1}^{n} Z_k$ comme somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre p_n, suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_n)$.

Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} Z_k$ a même loi que T_n et donc même fonction de répartition.

On poursuit le calcul fait plus haut :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ P(S_n \leq x) = P(T_n \leq np_n + \sigma_n x) = P\left(\frac{T_n - np_n}{\sigma_n} \leq x\right) = P\left(\frac{T_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \leq x\right).$$

S_n et $\frac{T_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}$ ont donc même fonction de répartition, puis même distance de Kolomogorov.

• La question 19)b) donne : $d_{S_n}(x) \leq 2\sqrt{3\left(\frac{\sigma_n}{n} + \frac{1}{2\sigma_n}\right)}$ avec $\sigma_n = \sqrt{np_n(1-p_n)}$.

$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} (1-p_n) = 1$, puis $\lim_{n\to+\infty} np_n = +\infty$.

Par produit, $\lim_{n\to+\infty} np_n(1-p_n) = +\infty$, puis $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sigma_n} = 0$.

Enfin, $\frac{\sigma_n}{n} = \frac{\sqrt{np_n(1-p_n)}}{n} = \sqrt{\frac{p_n(1-p_n)}{n}}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma_n}{n} = 0$.

On déduit que $\lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{3\left(\frac{\sigma_n}{n} + \frac{1}{2\sigma_n}\right)} = 0$.

Ainsi, $(S_n)_{n\geq 1}$ et $\left(\frac{T_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)_{n\geq 1}$ convergent uniformément en loi vers N.

20)a)Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
d_X\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right) &= \left|F_X\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right) - \Phi\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right| \\
&= \left|P\left(X \leq \frac{x-\beta}{\alpha}\right) - P\left(N \leq \frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right| \\
&= \left|P(\alpha X \leq x-\beta) - P(\alpha N \leq x-\beta)\right| \quad \text{car } \alpha > 0 \\
&= \left|P(\alpha X + \beta \leq x) - P(\alpha N + \beta \leq x)\right| \\
&= \left|F_{\alpha X+\beta}(x) - F_{\alpha N+\beta}(x)\right|.
\end{aligned}$$

b)Comme $(V_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément en loi vers N, il existe une suite $(\delta_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers zéro telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R},\ d_{V_n}(x) \leq \delta_n \quad (*).$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$\left|P(a_nV_n + b_n \leq x) - P(a_nN + b_n \leq x)\right|$

$= \left|F_{a_nV_n+b_n}(x) - F_{a_nN+b_n}(x)\right|$

$= d_{V_n}\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right)$ en utilisant 20)a) avec $\alpha \to a_n$ et $\beta \to b_n$.

Grâce à $(*)$, on déduit :
$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R},\ 0 \leq \left|P(a_n V_n + b_n \leq x) - P(a_n N + b_n \leq x)\right| \leq \delta_n$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta_n = 0$, on conclut d'après la propriété des gendarmes que
$\forall x \in \mathbf{R},\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left|P(a_n V_n + b_n \leq x) - P(a_n N + b_n \leq x)\right| = 0$.
On a finalement :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \lim_{n \to +\infty} \big(P(a_n V_n + b_n \leq x) - P(a_n N + b_n \leq x)\big) = 0.$$

c)$\bullet$ Soit $x \in \mathbf{R}$.
$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(a_n N + b_n \leq x) = P\left(N \leq \dfrac{x - b_n}{a_n}\right) = \Phi\left(\dfrac{x - b_n}{a_n}\right)$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = b$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x - b_n}{a_n} = \dfrac{x - b}{a}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \Phi\left(\frac{x - b_n}{a_n}\right) &= \Phi\left(\frac{x - b}{a}\right) \quad \text{car } \Phi \text{ est continue sur } \mathbf{R} \\
&= P\left(N \leq \frac{x - b}{a}\right) \\
&= P(aN \leq x - b) \\
&= P(aN + b \leq x).
\end{aligned}$$

On conclut que $\forall x \in \mathbf{R},\ \lim\limits_{n \to +\infty} P(a_n N + b_n \leq x) = P(aN + b \leq x)$.

$\bullet$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \big(P(a_n V_n + b_n \leq x) - P(a_n N + b_n \leq x)\big) = 0$
et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(a_n N + b_n \leq x) = P(aN + b \leq x)$.
Par somme de limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(a_n V_n + b_n \leq x) = P(aN + b \leq x)$.

Ainsi, $(a_n V_n + b_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $aN + b$.

$\bullet$ Comme $N \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$, alors $aN + b \hookrightarrow \mathscr{N}(b, a^2)$.

21)a)D'après la question 14), on a $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ D_n = \dfrac{C_n - np_n}{\sqrt{np_n(1 - p_n)}}$
avec $C_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$ ainsi que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} np_n = +\infty$, grâce à 14)b).

En appliquant le résultat de la question 19)c) avec $T_n \to C_n$, on conclut que la suite $(D_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément en loi vers N.

b)La question 14)c) donne : $\hat{f}_n = a_n D_n + b_n$.
avec $a_n = \dfrac{\sigma_n}{\theta_n \sqrt{n}}$ et $b_n = \sqrt{n}\left(\dfrac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right)$,
ainsi que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = b = 0$.

D'après la question 21)a), la suite $(D_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément en loi vers N.
On est alors dans le cadre de la question 20). La question 20)c) appliquée avec $V_n \to D_n$ montre que la suite $(a_n D_n + b_n)_{n \geq 1}$, c'est-à-dire $\big(\hat{f}_n\big)_{n \geq 1}$, converge en loi vers $aN + b = N$.