Exercice 1 (ecricome 2015)

Partie I :

1)a)Une densité de X est $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si x } \geq 0. \end{cases}$

$E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 1$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2} = 1$.

1)b)La fonction de répartition F de X est définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

• premier cas : $x < 0$

f est nulle sur $]-\infty, 0[$ donc sur $]-\infty, x]$. Ainsi, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.

• deuxième cas : $x \geq 0$

$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x}$.

On a donc $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si x } \geq 0. \end{cases}$

2)a)Etudions les variations puis le signe de la fonction $\varphi : x \mapsto e^x - x - 1$.
φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de fonctions dérivables et
$\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi'(x) = e^x - 1$.

$\varphi'(x) \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Le tableau de variations donne $\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi(x) \geq 0$, ce qui montre que $\forall x \in \mathbf{R},\ e^x \geq x + 1$.

De plus, $\varphi(x) = 0 \iff x = 0$, c'est-à-dire : $e^x = x + 1 \iff x = 0$.

2)b)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n > 0$ ».

$\mathscr{P}(1)$ est vraie puisque $u_1 = 1$.

Soit $n \geq 1$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
$u_{n+1} = F(u_n) = 1 - e^{-u_n}$ puisque $u_n > 0$ (hypothèse de récurrence).

Puis, $u_n > 0$ donne $-u_n < 0$, $e^{-u_n} < 1$, $1 - e^{-u_n} > 0$, soit $u_{n+1} > 0$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n > 0$.

2)c)programme :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def suite(n):
    u=1
    for k in range(2,n+1):
        u=1-np.exp(-u)
    return u
X=[k for k in range(1,101)]
Y=[suite(k) for k in range(1,101)]
plt.plot(X,Y, "+")
```

2)d)On peut conjecturer que la suite $(un)_{n\geq 1}$ est décroissante et qu'elle converge vers 0.

2)e)On a vu que $\forall x \in \mathbf{R},\ e^x \geq x+1$.
En remplaçant x par $-x$, on a $\forall x \in \mathbf{R},\ e^{-x} \geq -x+1$, soit $\forall x \geq 0, F(x) \leq x$.
Comme $u_n > 0$, il est valide de remplacer ci-dessus x par u_n, on déduit : $F(u_n) \leq u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$.
Donc $(un)_{n\geq 1}$ est décroissante.

2)f)La suite $(un)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers une limite L.

On sait que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n > 0$ donc par passage à la limite, $L \geq 0$.
F est continue sur $\mathbf{R}$ (en tant que fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité) donc continue en L.

D'après le théorème du point fixe, L est solution de l'équation $F(x) = 0$.
Or, $\forall x \geq 0,\ F(x) = 0 \iff 1 - e^{-x} = 0 \iff e^{-x} = 1 \iff x = 0$.
Donc $L = 0$.

2)g)De l'inégalité $\forall x \in \mathbf{R},\ e^x \geq x+1$, on déduit :
$\dfrac{1}{e^x} \leq \dfrac{1}{x+1}$, soit $e^{-x} \leq \dfrac{1}{x+1}$, puis $-e^{-x} \geq \dfrac{-1}{x+1}$ et $1 - e^{-x} \geq 1 - \dfrac{1}{x+1}$.
On a donc $\forall x \in \mathbf{R},\ 1 - e^{-x} \geq \dfrac{x}{x+1}$, c'est-à-dire $F(x) \geq \dfrac{x}{x+1}$.

Comme $u_n > 0$, il est licite de remplacer x par u_n dans l'inégalité ci-dessus, ce qui donne :
$F(u_n) \geq \dfrac{u_n}{u_n+1}$ ou encore $u_{n+1} \geq \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Par passage à l'inverse, on a : $\dfrac{1}{u_{n+1}} \leq \dfrac{1+u_n}{u_n}$, soit $\dfrac{1}{u_{n+1}} \leq 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

2)h)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n \geq \dfrac{1}{n}$ ».

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $u_1 \geq 1$ ». C'est vrai car $u_1 = 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

L'hypothèse de récurrence $u_n \geq \dfrac{1}{n}$ donne $\dfrac{1}{u_n} \leq n$, puis $1 + \dfrac{1}{u_n} \leq n+1$.

Or, d'après la question 2)g), on a : $\dfrac{1}{u_{n+1}} \leq 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

En recollant les inégalités, on déduit : $\dfrac{1}{u_{n+1}} \leq n+1$, puis $u_{n+1} \geq \dfrac{1}{n+1}$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n \geq \dfrac{1}{n}$.

2)i)S est la liste formée des sommes partielles successives de la série de terme général u_n.
Plus précisément, si on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, la liste s'écrit : $S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$.

Graphiquement, $S_{100} \approx 8$, ce qui laisse présager que $(S_n)_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$. Donc la série de terme général u_n semble diverger.

2)j)La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique) et pour tout $n \in \mathbf{N}^*,\ u_n \geq \dfrac{1}{n}$.

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série de terme général u_n diverge.

Partie II :

1)a)g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) et sur $]0, +\infty[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec le produit et la composée de fonctions dérivables.

$\displaystyle\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0\,;\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{-x} = 0\,;\ g(0) = 0.$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$, ce qui prouve que g est continue en 0.

Par ailleurs, on a :

$\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0-0}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1.$

Les limites trouvées prouvent que :

– g est dérivable à droite et à gauche en 0,

– $g'_g(0) = 0$ et $g'_d(0) = 1$.

Comme $g'_g(0) \neq g'_d(0)$, on conclut que g n'est pas dérivable en 0.

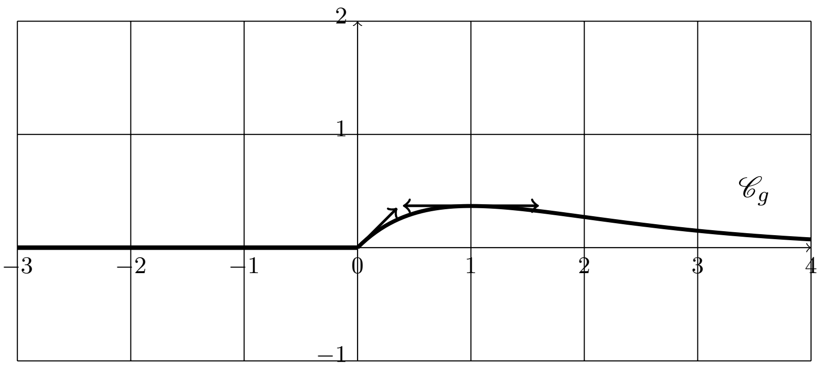
1)b)$\forall x \geq 0,\ g'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$.
$\forall x \in \mathbf{R},\ e^{-x} > 0$ donc $g'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow 1 - x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 1$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées.

1)c)g' est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables et $\forall x > 0,\ g''(x) = -1 \times e^{-x} + (1-x) \times (-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$.
$g''(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x - 2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 2$.
Donc g est concave sur $]0,2]$, puis convexe sur $[2,+\infty[$.

1)d)



2)a)• $\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) \geq 0$.
• g est continue sur $\mathbf{R}^*$ (car dérivable sur $\mathbf{R}^*$) et continue en 0.
Donc g est continue sur $\mathbf{R}$.
• $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ où f est la densité de la loi $\mathscr{E}(1)$.
Cette intégrale converge car elle représente l'espérance de X trouvée dans la question I.1.a). Elle vaut donc 1.
On conclut que g est une densité de probabilité.

2)b)g est continue sur $\mathbf{R}$ donc G est dérivable sur $\mathbf{R}$ et
$\forall x \in \mathbf{R}, G'(x) = g(x)$.
G' est alors continue sur $\mathbf{R}$.
Ainsi, G est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

2)c)La fonction de répartition G de Y est définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt.$$

• premier cas : $x < 0$

g est nulle sur $]-\infty, 0[$ donc sur $]-\infty, x]$. Ainsi, $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.

• deuxième cas : $x \geq 0$

$G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{x} g(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} te^{-t}dt = \int_{0}^{x} te^{-t}dt.$

Pour calculer cette intégrale, on effectue une intégration par parties en posant :

$u(t) = t \qquad v'(t) = e^{-t}$

$u'(t) = 1 \qquad v(t) = -e^{-t}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[0, x]$. L'IPP est licite et donne :

$\displaystyle\int_{0}^{x} te^{-t}dt = \left[-te^{-t}\right]_0^x - \int_{0}^{x} -e^{-t}dt = -xe^{-x} - \left[e^{-t}\right]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1.$

On a donc $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x}(x+1) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

2)d)Y admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt$ est absolument convergente.

Elle vaut $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ et converge car égale au moment d'ordre de X.

Ainsi, Y admet une espérance qu'on obtient par la formule de Koënig :

$E(Y) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1 + 1^2 = 2.$

3)a)$\forall x \in \mathbf{R},\ H(x) = P(Z \leq x) = P(e^Y \leq x)$.

• premier cas : $x \leq 0$

Comme $e^Y > 0$ et que $x \leq 0$, l'événement $\left(e^Y \leq x\right)$ est impossible.
Donc $H(x) = 0$.

• deuxième cas : $x > 0$

$$\begin{aligned} H(x) &= P(Y \leq \ln x) \\ &= G(\ln x) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \ln x < 0 \\ 1 - e^{-\ln x}(\ln x + 1) & \text{si } \ln x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{\ln x + 1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

En rassemblant les deux cas, on a : $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{\ln x + 1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

3)b)H est continue sur $]-\infty, 1[$ (fonction nulle) et sur $[1, +\infty[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec le produit, la somme et l'inverse de fonctions continues.

De plus, on a :

$\lim\limits_{x \to 1^-} H(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 0 = 0 = H(1)$,

$\lim\limits_{x \to 1^+} H(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(1 - \dfrac{\ln x + 1}{x}\right) = 0 = H(1)$.

Donc $\lim\limits_{x \to 1^-} H(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} H(x) = H(1)$. Ainsi, H est continue en 1.

Donc H est continue sur $\mathbf{R}$.

Enfin, H est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$ (fonction nulle) et sur $[1, +\infty[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec le produit, la somme et l'inverse de fonctions de classe C^1. Ainsi, H est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 1.

On conclut que Z est une variable aléatoire à densité.

Une densité h de Z est donnée par :

$h(x) = \begin{cases} H'(x) & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Or, $\forall x < 1,\ H'(x) = 0$ et $\forall x > 1,\ H'(x) = -\dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times (\ln x + 1)}{x^2} = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

On a finalement : $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{\ln x}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$, soit $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{\ln x}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$

3)c)Z admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx$ est absolument convergente.

Comme $x \mapsto xh(x)$ est nulle sur $]-\infty, 1]$ et positive sur $]1, +\infty[$, cela se ramène à étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} xh(x)dx$, c'est-à-dire de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$.

Or, pour tout réel $A > 1$, on a :

$\lim\limits_{A \to +\infty} \displaystyle\int_1^A \frac{\ln x}{x}dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^A = \lim\limits_{A \to +\infty} \frac{(\ln A)^2}{2} = +\infty.$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$ diverge.

On conclut que Z n'admet pas d'espérance.

Exercice 2 (ecricome 2015) **(Original modifié !)**

Partie I :

1)Pour toutes matrices M et N de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, pour tout réel λ, on a :
$\varphi_A(\lambda M+N)=A(\lambda M+N)=\lambda AM+AN=\lambda\varphi_A(M)+\varphi_A(N)$.
Donc est linéaire.
De plus, comme $A\in\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, on a $\forall M\in\mathscr{M}_2(\mathbf{R}), AM\in\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, c'est-à-dire $\varphi_A(M)\in\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Donc φ_A est « endo ».
Ainsi, φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

2)Supposons φ_A bijectif. Alors, toute matrice Y de l'ensemble d'arrivée $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ admet un unique antécédent par φ_A.
Prenons $Y=I_2$. Alors, I_2 admet un unique antécédent N par φ_A, c'est-à-dire qu'il existe une unique matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $\varphi_A(N)=I_2$ ou encore telle que $AN=I_2$.

3)Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

La question 2) prouve que si φ_A est bijectif, alors A est inversible et que son inverse est N.

Réciproquement, supposons A inversible.
$M\in Ker\varphi_A \iff \varphi_A(M)=0 \iff AM=0 \iff A^{-1}(AM)=A^{-1}0$
$\iff M=0$.
Donc $Ker\varphi_A=\{0\}$, ce qui prouve que φ_A est injectif.
φ_A est un endomorphisme injectif donc bijectif.

On a prouvé que φ_A est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ si et seulement si A est inversible.

Partie II :

1)A est triangulaire.
Ses valeurs propres sont sur la diagonale et valent donc -1 et 1.
A est diagonalisable car elle admet deux valeurs propres distinctes et qu'elle est dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

2)$\varphi_A\left(E_{11}\right)=AE_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=1E_{11}+0E_{12}+0E_{21}+0E_{22}$

$\varphi_A\left(E_{12}\right)=AE_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=0E_{11}+1E_{12}+0E_{21}+0E_{22}$

$\varphi_A\left(E_{21}\right)=AE_{21}=\begin{pmatrix}2&0\\-1&0\end{pmatrix}=2E_{11}+0E_{12}-1E_{21}+0E_{22}$

$\varphi_A\left(E_{22}\right)=AE_{22}=\begin{pmatrix}0&2\\0&-1\end{pmatrix}=0E_{11}+2E_{12}+0E_{21}-1E_{22}$.

La matrice de φ_A dans la base $\mathscr{B}$ est donc $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3)• T est triangulaire.
Les valeurs propres de T sont sur la diagonale et valent donc -1 et 1.

• Cherchons les sous-espaces propres de T.

$E_{-1}(T) = \{U \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid (T+I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$(T+I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & 2z & = & 0 \\ 2y & + & 2t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -z \\ y & = & -t \end{array} \right.$$

Donc $E_{-1}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -t \\ z \\ t \end{pmatrix}, (z,t) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_{-1}(T)$ et libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $E_{-1}(T)$.

$E_1(T) = \{U \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid (T-I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$(T-I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} z & = & 0 \\ t & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $E_1(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_1(T)$ et libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires.

C'est donc une base de $E_1(T)$.

4)Les sous-espaces propres de T ont pour dimension 2 compte tenu des bases trouvées.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de T vaut donc 4. Or, $T \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$.
D'après le théorème de réduction, T est diagonalisable.

Partie III :

1)a)Comme λ est valeur propre de T et que U est un vecteur propre associé, U est non nul et vérifie : $TU = \lambda U \quad (*)$

Soit M la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ dont le vecteur colonne dans la base $\mathscr{C}$ est U.
Comme $T = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\varphi_A)$, la matrice TU représente le vecteur colonne de $\varphi_A(M)$ dans la base $\mathscr{C}$.

L'égalité $(*)$ s'écrit alors : $\varphi_A(M) = \lambda M$.

Enfin, M est non nulle puisque $U \neq 0$ en tant que vecteur propre de T.

b)Supposons que $A - \lambda I_2$ est inversible.
L'égalité $\varphi_A(M) = \lambda M$ donne $AM = \lambda M$, puis $(A - \lambda I_2)M = 0$.
En multipliant à gauche par $(A - \lambda I_2)^{-1}$, on obtient :
$(A - \lambda I_2)^{-1}(A - \lambda I_2)M = (A - \lambda I_2)^{-1}0$, d'où $M = 0$, ce qui est absurde puisque l'énoncé suppose $M \neq 0$.

Donc $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

2)a)Comme μ est une valeur propre de A et X un vecteur propre associé, X est non nul et vérifie l'égalité : $AX = \mu X$, c'est-à-dire :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} x + 2y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu y \end{pmatrix}$.

D'où le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} x & + & 2y & = \mu x \\ & - & y & = \mu y \end{array} \right.$$

On a alors : $\varphi_A(N) = AN$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x+2y & 0 \\ -y & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mu x & 0 \\ \mu y & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mu \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mu N.
\end{aligned}$$

b)Le vecteur colonne de $\varphi_A(N)$ dans la base $\mathscr{C}$ est TU et le vecteur colonne de N dans la base $\mathscr{C}$ est U.

L'égalité $\varphi_A(N) = \mu N$ donne donc $TU = \mu U$.

3)La question 1) prouve que si λ est valeur propre de φ_A, alors $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, ce qui signifie que λ est valeur propre de A.
On a donc $sp(\varphi_A) \subset sp(A)$.

La question 2) prouve que si μ est valeur propre de A, alors $TU = \mu U$.
Comme X est un vecteur propre de A, il est non nul.
Cela force U à être non nul aussi.
$TU = \mu U$ et $U \neq 0$ signifient que μ est valeur propre de T.

On a donc $sp(A) \subset sp(\varphi_A)$.

On conclut que $sp(\varphi_A) = sp(A)$.

Exercice 3 (ecricome 2015)

Partie I :

1)programme :

```
from numpy.random import randint
from matplotlib.pyplot import bar
N=int(input("donner un entier naturel non nul"))
S=[0]*(N+1)#on initialise la liste S avec N+1 zéros
#S[0] reste nul jusqu'à la fin du programme
for k in range(10000):
    i=1
    M=N #initialement, le nombre M de boules vaut N
    while randint(M)!=0:
        i=i+1
        M=M-1
    S[i]=S[i]+1
Freq=[S[j]/10000 for j in range(1,N+1)]
print(Freq)
X=[k for k in range(1,N+1)]
bar(X,Freq)
```

Explications :
On réalise 10000 expériences aléatoires.
A chaque expérience aléatoire, on tire une à une les boules de l'urne jusqu'à l'obtention de la noire (le nombre de boules tirées peut aller de 1 à N).
Le nombre M de boules présentes dans l'urne vaut N initialement, puis décroît de un en un (par la commande $M = M - 1$) tant que la boule noire n'est pas tirée .
Au moment d'effectuer le tirage numéro $i \in \{1, ..., N\}$ (commande while), il y a M boules encore présentes dans l'urne dont $M - 1$ blanches et 1 noire.
En convenant que la noire porte systématiquement le numéro 0 et les blanches les numéros 1 à $M - 1$, la probabilité de tirer la noire est de $1/M$ tout comme la probabilité pour que $randint(M)$ vale 0.
Dès que $randint(M)$ vaut 0, c'est qu'on a tiré la noire et l'expérience aléatoire s'arrête. On augmente alors $S[i]$ de 1, $S[i]$ représentant le nombre de fois où, au fil des expériences aléatoires, la boule noire est sortie au tirage numéro i.

2)On suppose ici que $N = 5$.
Pour tout $j \in [\![1, 5]\!]$, Freq[j] représente la fréquence d'apparition de l'événement $(X = j)$, c'est-à-dire :
Freq[j]=(nombre de fois où la boule noire sort au tirage numéro j)/10000.

Du fait du grand nombre d'expériences aléatoires effectuées, la loi faible des grands nombres assure que cette fréquence d'apparition est proche de la probabilité théorique $P(X = j)$.

Pour tout $j \in [\![1, 5]\!]$, l'histogramme donne $Freq[j] \approx 0,2$
On peut donc conjecturer que pour tout $j \in [\![1, 5]\!]$, $P(X = j) = 0,2$.

Il semble donc X suive une loi uniforme sur $[\![1, 5]\!]$.

3)$P(X = 1) = P(N_1) = \dfrac{1}{N}$,

$P(X = 2) = P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2) = \dfrac{N-1}{N} \times \dfrac{1}{N-1} = \dfrac{1}{N}$,

$P(X = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(N_3)$
$= \dfrac{N-1}{N} \times \dfrac{N-2}{N-1} \times \dfrac{1}{N-2} = \dfrac{1}{N}$.

4)Remarquons d'abord que $\forall i \in [\![1, N-2]\!],\ P_{B_1\cap\ldots\cap B_i}(B_{i+1}) = \dfrac{(N-1)-i}{N-i}$.

En effet, supposons $B_1 \cap \ldots \cap B_i$ réalisé.
Comme i boules sont tirées, il reste dans l'urne $N - i$ boules.
Des $N - 1$ boules blanches présentes initialement dans l'urne, il en reste $(N - 1) - i$.
Au i+1-ème tirage, la probabilité de tirer une blanche vaut donc $\dfrac{(N-1)-i}{N-i}$.

La formule des probabilités composées donne pour tout $k \in [\![1, N]\!]$:

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k) \\
&= P(B_1)P_{B_1}(B_2)\cdots P_{B_1\cap\ldots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})P_{B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}}(N_k) \\
&= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \cdots \times \frac{(N-1)-(k-2)}{N-(k-2)} \times \frac{1}{N-(k-1)} \\
&= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \cdots \times \frac{N-k+1}{N-k+2} \times \frac{1}{N-k+1} \\
&= \frac{1}{N},\ \text{par télescopage.}
\end{aligned}$$

Donc $X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1, N]\!]\big)$.

5)Le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la noire est :

$$E(X) = \frac{N+1}{2}.$$

Partie II :

1)Supposons C_1 réalisé. On a donc choisi l'urne 1 (sans qu'on le sache).
On reconnaîtra que c'est l'urne 1 dès lors qu'on tirera la boule noire.
Or, la probabilité de tirer la boule noire au j-ième tirage quand on est dans l'urne U_1 vaut $\dfrac{1}{N}$ d'après la partie I.
Donc $P_{C_1}(Y = j) = \dfrac{1}{N}$.

2)L'urne U_2 ne contient pas de boule noire. Si elle est choisie, il faudra tirer les N boules pour être certain que c'est bien l'urne 2. En effet, tant qu'on ne les pas toutes tirées, on ne peut pas exclure d'obtenir une boule noire et d'être dans U_1.
Donc $P_{C_2}(Y = N) = 1$ et $\forall j \in [\![1, N-1]\!],\ P_{C_2}(Y = j) = 0$.

3)La formule des probabilités totales pour le s.c.e $(C1, C2)$ donne :
$P(Y = j) = P_{C_1}(Y = j)P(C_1) + P_{C_2}(Y = j)P(C_2)$.
On distingue 2 cas :
premier cas : $j = N$

$$\begin{aligned} P(Y = N) &= P_{C_1}(Y = N)P(C_1) + P_{C_2}(Y = N)P(C_2) \\ &= \frac{1}{N} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}. \end{aligned}$$

deuxième cas : $j \in [\![1, N-1]\!]$
$P(Y = j) = P_{C_1}(Y = j)P(C_1) + P_{C_2}(Y = j)P(C_2) = \dfrac{1}{N} \times \dfrac{1}{2} + 0 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2N}$.

4)Y est discrète finie donc admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=1}^{N} jP(Y = j) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} jP(Y = j) + NP(Y = N) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} j \times \frac{1}{2N} + N\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2N}\right) \\ &= \frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N-1} j + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2N} \times \frac{(N-1)N}{2} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3N+1}{4}. \end{aligned}$$

Partie III :

1)Il faut au moins deux tirages pour obtenir une blanche et une noire, et le nombre de tirages peut être arbitrairement grand. Donc $T(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.

2)Pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$P(T = k)$

$= P\big((B_1 \cap ... \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap ... \cap N_{k-1} \cap B_k)\big)$

$= P(B_1 \cap ... \cap B_{k-1} \cap N_k) + P(N_1 \cap ... \cap N_{k-1} \cap B_k)$ par incompatibilité

$= P(B_1) \cdots P(B_{k-1}) P(N_k) + P(N_1) \cdots P(N_{k-1}) P(B_k)$ par indépendance

$= \dfrac{N-1}{N} \times \cdots \times \dfrac{N-1}{N} \times \dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{N} \times \cdots \times \dfrac{1}{N} \times \dfrac{N-1}{N}$

$= \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \dfrac{N-1}{N}\left(\dfrac{1}{N}\right)^{k-1}.$

3)Pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$\big|kP(T = k)\big| = kP(T = k) = \frac{1}{N} \times k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N} \times k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}.$$

Les séries $\displaystyle\sum_{k \geq 2} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}$ et $\displaystyle\sum_{k \geq 2} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$ sont des séries dérivées premières de paramètres $\frac{N-1}{N}$ et $\frac{1}{N}$.

Elles convergent car leur paramètre appartient à l'intervalle $]-1, 1[$.

Par CL de séries convergentes, la série $\displaystyle\sum_{k \geq 2} kP(T = k)$ est absolument convergente.

Donc T admet une espérance.

$$\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{k=2}^{+\infty} kP(T = k) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}. \\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} - 1\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{N-1}{N}\right)^2} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{N}(N^2 - 1) + \frac{N-1}{N}\left(\frac{N^2}{(N-1)^2} - 1\right) \\
&= \frac{N^2 - N + 1}{N - 1}.
\end{aligned}$$

4)a)$(T=2)=(B_1\cap N_2)\cup(N_1\cap B_2)$. Donc $(T=2)\subset(U=1)$.

On déduit :

$$P(U=1\cap T=2)=P(T=2)=\frac{1}{N}\times\frac{N-1}{N}+\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{N}=\frac{2(N-1)}{N^2}.$$

4)b)Pour tout entier $k\geq 3$, on a :

$$P(U=1\cap T=k)=P(N_1\cap ...\cap N_{k-1}\cap B_k)=\frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}.$$

5)a)Pour tout entier $j\geq 2$, on a :

$$P(U=j\cap T=j+1)=P(B_1\cap ...\cap B_j\cap N_{j+1})=\frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{j}.$$

5)b)Si $k\neq j+1$, alors $P(U=j\cap T=k)=0$.

6)En prenant $j=2$ et $k=2$, on a : $P(U=2\cap T=2)=0$, alors que $P(U=2)\neq 0$ et $P(T=2)\neq 0$.
Donc $P(U=2\cap T=2)\neq P(U=2)P(T=2)$, ce qui montre que T et U ne sont pas indépendantes.

7)La formule des probabilités totales pour le s.c.e $(T=k)_{k\geq 2}$ donne :

$$\begin{aligned}
P(U=1)&=\sum_{k=2}^{+\infty}P(U=1\cap T=k)\\
&=P(U=1\cap T=2)+\sum_{k=3}^{+\infty}P(U=1\cap T=k)\\
&=\frac{2(N-1)}{N^2}+\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\\
&=\frac{2(N-1)}{N^2}+\frac{N-1}{N}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^{j+2}\quad\text{en posant } j=k-3\\
&=\frac{2(N-1)}{N^2}+\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{N^2}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^{j}\\
&=\frac{2(N-1)}{N^2}+\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{N^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{N}}\\
&=\frac{2(N-1)}{N^2}+\frac{1}{N^2}\\
&=\frac{2N-1}{N^2}.
\end{aligned}$$

Enfin, pour tout entier $j\geq 2$, la formule des probabilités totales pour le s.c.e $(T=k)_{k\geq 2}$ donne :

$$
\begin{aligned}
P(U=j) &= \sum_{k=2}^{+\infty} P(U=j \cap T=k) \\
&= P(U=j \cap T=j+1) \text{ car si } k \neq j+1, P(U=j \cap T=k)=0 \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{j}.
\end{aligned}
$$