
Exercice 1 (ecricome 2017)

A1) On trouve $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$(A - I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A2) Comme $(A - I)^3 = O$, le polynôme $P(X) = (X - 1)^3$ est un polynôme annulateur de A . Donc $sp(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \{1\}$.

Ainsi, la seule valeur propre possible de A est 1.

Enfin, $A - I$ n'est pas inversible puisqu'elle possède deux lignes identiques donc 1 est bien valeur propre de A .

On conclut que $sp(A) = \{1\}$.

A3) 0 n'est pas valeur propre de A donc A est inversible.

Supposons A diagonalisable. Alors, il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A et valent donc 1, ainsi $D = I$.

On déduit que $A = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$, ce qui est absurde.

Donc A n'est pas diagonalisable.

✓ On pouvait aussi chercher $E_1(A)$, constater que sa dimension est strictement inférieure à 3 et conclure par le thm de réduction.

B4) La fonction $x \mapsto 1 + x$ est de classe C^2 sur $] -1; 1[$, prend ses valeurs dans $]0; +\infty[$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$.

Donc par composée, φ est de classe C^2 sur $] -1; 1[$.

On a $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ donc $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$.

Puis, $\varphi''(x) = \left[\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \right]' = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (1+x)^{-3/2} = \frac{-1}{4(1+x)^{3/2}}$.

Donc $\varphi''(0) = -\frac{1}{4}$.

B5) φ étant de classe C^2 sur $] -1; 1[$, on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2, ce qui donne :

$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

Soit, $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

Donc $\alpha = -\frac{1}{8}$.

B6) On a $P(x)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \right)^2 = \dots = 1 + x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4$.

B7)

On a $(P(C))^2 = I + C - \frac{1}{8}C^3 + \frac{1}{64}C^4 = I + C$ car $C^3 = C^4 = O$ par **A1**.

D'où $(P(C))^2 = A$.

Ainsi, $P(C)$ est une matrice M vérifiant $M^2 = A$. Il reste à expliciter $P(C)$.

$$\begin{aligned} P(C) &= I + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^2 \\ &= I + \frac{1}{2}(A - I) - \frac{1}{8}(A - I)^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 & 1 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

C8a) Le vecteur colonne de $f(w)$ dans la base canonique est :

$$AW = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ donc } f(w) = (2, 1, -2).$$

D'où $v = (2, 1, -2) - (1, 0, 1) = (1, 1, -3)$.

Le vecteur colonne de $f(v)$ dans la base canonique est :

$$AV = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ donc } f(v) = (-5, -5, -3).$$

D'où $u = (-5, -5, -3) - (1, 1, -3) = (-6, -6, 0)$.

C8b) Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la famille $\mathcal{B}'$.

$$\text{On a } P = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P \sim \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ par } L_2 \leftarrow L_1 - L_2.$$

$$\sim \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ par } L_2 \leftrightarrow L_3.$$

On obtient une matrice triangulaire donc les éléments diagonaux sont non-nuls donc P est inversible. Ainsi, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

✓ On pouvait aussi faire cette question en résolvant le système provenant de $au + bv + cw = 0$.

C8c) Le vecteur colonne de $f(u)$ dans la base canonique est :

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } f(u) = (-6, -6, 0).$$

On a donc $f(u) = u$.

D'autre part, par construction, on a : $u = f(v) - v$ donc $f(v) = u + v$ et $v = f(w) - w$ donc $f(w) = v + w$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$.

C8d) La formule de changement de base pour l'endomorphisme f donne :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}).$$

Soit $T = P^{-1}AP$ où P est la matrice explicitée dans la question **A8b**).

C9a) Si $N^2 = T$, alors on a : $NT = NN^2 = N^3 = N^2N = TN$.

$$\text{Posons } N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

$$NT = TN \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+d = a \\ b+e = a+b \\ c+f = b+c \\ d+g = d \\ e+h = d+e \\ f+i = e+f \\ h = g+h \\ i = h+i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = g = h = 0 \\ e = a \\ f = b \\ i = e \end{cases}$$

$$\text{Donc } N \text{ est bien de la forme } \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

C9b) Soit N une matrice telle que $N^2 = T$, alors N est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Par ailleurs, } N^2 = T &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 &= 1 \\ 2ab &= 1 \\ b^2 + 2ac &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{8} \\ \text{ou} \\ a = -1, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, les seules solutions possibles de l'équation $N^2 = T$ sont :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie réciproquement par un calcul que $N_1^2 = T$ et que $N_2^2 = T$.

Ainsi, l'équation $N^2 = T$ admet exactement N_1 et N_2 comme solutions.

C10) On a : $M^2 = A \Leftrightarrow M^2 = PTP^{-1}$

$$\Leftrightarrow P^{-1}M^2P = T$$

$$\Leftrightarrow (P^{-1}MP)^2 = T$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}MP = N_1 \text{ ou } P^{-1}MP = N_2$$

$$\Leftrightarrow M = PN_1P^{-1} \text{ ou } M = PN_2P^{-1}.$$

C11) La matrice nulle n'appartient pas à E car $O^2 \neq A$.

Donc E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ donc pas un espace vectoriel.

Exercice 2 (ecricome 2017)

A1 On a $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2a} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = -\infty$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, on a : $\ln x = o(x^{2a})$ donc $\varphi(x) \sim -ax^{2a}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -ax^{2a} = -\infty$ car $a > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$.

A2 φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme différence de fonctions dérivables et

on a $\forall x > 0 : \varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2 x^{2a-1} = \frac{1 - 2a^2 x^{2a}}{x}$.

$$\varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2a^2 x^{2a} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^{2a} \leq \frac{1}{2a^2}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{1/2a} \text{ par croissance de } x \mapsto x^{1/2a} \text{ sur }]0; +\infty[.$$

x	0	x_0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	-
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\varphi(x_0)$	$-\infty$

$$\checkmark \text{ On a } \varphi(x_0) = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - a\left(\frac{1}{2a^2}\right) = -\frac{1 + \ln(2a^2)}{2a}.$$

A3 On a $\varphi(x_0) > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(2a^2) < 0$

$$\Leftrightarrow \ln(2a^2) < -1$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 < e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow a^2 < \frac{1}{2e}$$

$$\Leftrightarrow a < \sqrt{\frac{1}{2e}} \text{ car } a > 0.$$

Ainsi, si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, on a $\varphi(x_0) > 0$.

L'équation $\varphi(x) = 0$ admet alors exactement deux solutions z_1 et z_2 grâce au tableau de variations de φ .

Pour la justification, on peut dire que φ étant continue et strictement croissante sur $]0; x_0[$, elle réalise une bijection de $]0; x_0[$ sur $]-\infty; \varphi(x_0)[$, intervalle qui contient 0 puisque $\varphi(x_0) > 0$.

Donc 0 admet un unique antécédent z_1 dans $]0; x_0[$. Ainsi, $z_1 < x_0$.

De la même façon, 0 admet un unique antécédent z_2 dans $]x_0; +\infty[$ et $z_2 > x_0$.

Si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$, alors $\varphi(x_0) = 0$ et l'équation $\varphi(x) = 0$ admet comme unique solution x_0 .

Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$, on a $\varphi(x_0) < 0$. La fonction φ est donc strictement négative sur $]0; +\infty[$ et l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet pas de solution.

B4 f est de classe C^2 sur U car elle est construite comme produit, différence et composée de fonctions de classe C^2 .

B5 $\partial_1 f(x, y) = \frac{1}{x} \ln y - ay(xy)^{a-1}$ et $\partial_2 f(x, y) = \frac{1}{y} \ln x - ax(xy)^{a-1}$.

B6 (x, y) est un point critique de $f \Leftrightarrow \partial_1 f(x, y) = 0$ et $\partial_2 f(x, y) = 0$
 $\Leftrightarrow \ln y = a(xy)^a$ et $\ln x = a(xy)^a$
 $\Leftrightarrow \ln x = \ln y$ et $\ln x = a(xy)^a$
 $\Leftrightarrow x = y$ et $\ln x = a(x^2)^a$
 $\Leftrightarrow x = y$ et $\varphi(x) = 0$.

B7 Si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, on a vu que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions z_1 et z_2 . Ainsi, les points critiques de f sont (z_1, z_1) et (z_2, z_2) .

Si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$, on a vu que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet comme unique solution x_0 . Ainsi, f admet un seul point critique qui est (x_0, x_0) .

Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$, on a vu que l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet pas de solution. Donc f n'admet pas de point critique.

C8 $\partial_{1,1}^2 f(x, y) = -\frac{1}{x^2} \ln y - ay [(a-1)y(xy)^{a-2}] = -\frac{1}{x^2} \ln y - a(a-1)y^2(xy)^{a-2}$.

$\partial_{2,1}^2 f(x, y) = \frac{1}{x} \frac{1}{y} - a [1(xy)^{a-1} + y(a-1)x(xy)^{a-2}] = \frac{1}{xy} - a^2(xy)^{a-1}$.

$\partial_{1,2}^2 f(x, y) = \partial_{2,1}^2 f(x, y)$ par le théorème de Schwarz.

$\partial_{2,2}^2 f(x, y) = -\frac{1}{y^2} \ln x - ax [(a-1)x(xy)^{a-2}] = -\frac{1}{y^2} \ln x - a(a-1)x^2(xy)^{a-2}$.

C9 $\partial_{1,1}^2 f(z_1, z_1) = -\frac{1}{z_1^2} \ln z_1 - a(a-1)z_1^2(z_1^2)^{a-2} = -\frac{1}{z_1^2} \ln z_1 - a(a-1)z_1^{2a-2}$.

Or, on a $\varphi(z_1) = 0$, soit $\ln z_1 = a(z_1)^{2a}$, ce qui donne en remplaçant ci-dessus : $\partial_{1,1}^2 f(z_1, z_1) = -a^2 z_1^{2a-2}$.

Un calcul analogue donne $\partial_{2,2}^2 f(z_1, z_1) = -a^2 z_1^{2a-2}$.

Enfin, $\partial_{2,1}^2 f(z_1, z_1) = \partial_{1,2}^2 f(z_1, z_1) = \frac{1}{z_1^2} - a^2(z_1^2)^{a-1} = \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2}$.

On déduit : $\nabla^2 f(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2 f(z_1, z_1) & \partial_{1,2}^2 f(z_1, z_1) \\ \partial_{2,1}^2 f(z_1, z_1) & \partial_{2,2}^2 f(z_1, z_1) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}.$$

C10 On trouve $MX_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \right] X_1.$

Cela prouve que $\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}$ est une valeur propre de M .

On a aussi $MX_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^2} \\ -\frac{1}{z_1^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{z_1^2} X_1.$

Cela prouve que $-\frac{1}{z_1^2}$ est une valeur propre de M .

C11 On a $\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} = \frac{1 - 2a^2 z_1^{2a}}{z_1^2}.$

Or, $z_1 < x_0$ donne $z_1 < \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{1/2a}$, soit $z_1^{2a} < \frac{1}{2a^2}.$

Ainsi, $\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} > 0.$

En conclusion, M possède deux valeurs propres de signes contraires. f ne possède donc pas d'extrémum en $(z_1, z_1).$

C12 On a de même $\nabla^2 f(z_2, z_2) = \begin{pmatrix} -a^2 z_2^{2a-2} & \frac{1}{z_2^2} - a^2 z_2^{2a-2} \\ \frac{1}{z_2^2} - a^2 z_2^{2a-2} & -a^2 z_2^{2a-2} \end{pmatrix}.$

Notons N cette matrice. En introduisant les mêmes vecteurs que dans la question **C10**, on trouve que $\frac{1}{z_2^2} - 2a^2 z_2^{2a-2}$ et $-\frac{1}{z_2^2}$ sont les valeurs propres de N .

La contrainte $x_0 < z_2$ donne cette fois-ci : $\frac{1}{z_2^2} - 2a^2 z_2^{2a-2} < 0.$

N possède alors deux valeurs propres strictement négatives. f possède donc en (z_2, z_2) un maximum local.

Exercice 3 (ecricome 2017)

A1 A chaque tirage, du fait de la remise, chacun des n numéros a la probabilité $\frac{1}{n}$ de sortir.

On a donc $\forall k \in \mathbf{N}^*, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket : P(X_k = i) = \frac{1}{n}$.

Ainsi, $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$.

On déduit $E(X_k) = \frac{n+1}{2}$.

A2a) T_n prend des valeurs entières.

Si la première boule tirée est la boule numérotée 1, alors on a $T_n = 1$.

Si on tire n fois la boule numérotée 1, alors on a $T_n = n$.

Dans tous les autres cas, on a $2 \leq T_n \leq n-1$. Donc $T_n(\Omega) \subset \llbracket 1; n \rrbracket$.

Réciproquement, toute valeur $i \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$ peut être obtenue par T_n (par exemple, si on tire $i-1$ fois la boule numérotée 1, puis la boule numérotée n au i -ème tirage, T_n vaut i). Donc $T_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

A2b) L'événement $(T_n = 1)$ se réalise si et seulement si on tire la boule numérotée n au premier tirage.

Donc $P(T_n = 1) = P(X_1 = n) = \frac{1}{n}$.

A2c) L'événement $(T_n = n)$ se réalise si et seulement si on tire la boule numérotée 1 aux $n-1$ premiers tirages (le n -ième tirage peut faire n'importe quoi, on est sûr que la somme dépassera n).

Donc $P(T_n = n) = P((X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_{n-1} = 1))$

$= P(X_1 = 1) \dots P(X_{n-1} = 1)$ par indépendance des tirages

$$= \frac{1}{n} \dots \frac{1}{n}$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

A3 On a $T_2(\Omega) = \llbracket 1; 2 \rrbracket$. $P(T_2 = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(T_2 = 2) = \frac{1}{2}$.

A4 On a $T_3(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket$.

$$P(T_3 = 1) = \frac{1}{3} \text{ et } P(T_3 = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \frac{1}{9}.$$

On déduit : $P(T_3 = 2) = 1 - P(T_3 = 1) - P(T_3 = 3) = \frac{5}{9}$.

$$\text{On a } E(T_3) = 1P(T_3 = 1) + 2P(T_3 = 2) + 3P(T_3 = 3) = \frac{1}{3} + \frac{10}{9} + \frac{3}{9} = \frac{16}{9}.$$

B5 La plus petite valeur prise par S_k est k (si les k premiers tirages amènent la boule numérotée 1).

La plus grande valeur prise par S_k est nk (si les k premiers tirages amènent la boule numérotée n).

Donc $S_k(\Omega) \subset \llbracket k; nk \rrbracket$, puis $S_k(\Omega) = \llbracket k; nk \rrbracket$.

B6a) $S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} X_i = \sum_{i=1}^k X_i + X_{k+1}$. Donc $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$.

B6b) Comme $S_k(\Omega) = \llbracket k; nk \rrbracket$, la famille d'événements $(S_k = j)_{k \leq j \leq nk}$ forme un système complet.

La formule des probabilités totales donne alors pour tout $i \in \llbracket k+1; n \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
 P(S_{k+1} = i) &= \sum_{j=k}^{kn} P_{(S_k=j)}(S_{k+1} = i)P(S_k = j) \\
 &= \sum_{j=k}^{kn} P_{(S_k=j)}(S_k + X_{k+1} = i)P(S_k = j) \\
 &= \sum_{j=k}^{kn} P_{(S_k=j)}(X_{k+1} = i - j)P(S_k = j) \\
 &= \sum_{j=k}^{kn} P(X_{k+1} = i - j)P(S_k = j) \text{ car } S_k \text{ et } X_{k+1} \text{ indépendantes.}
 \end{aligned}$$

Comme $X_{k+1}(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$, on peut dans la somme se limiter aux indices j tels que $1 \leq i - j \leq n$, c'est-à-dire $i - n \leq j \leq i - 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{On a ainsi } P(S_{k+1} = i) &= \sum_{j=\max(k, i-n)}^{\min(kn, i-1)} P(X_{k+1} = i - j)P(S_k = j) \\
 &= \sum_{j=\max(k, i-n)}^{\min(kn, i-1)} \frac{1}{n} P(S_k = j) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).
 \end{aligned}$$

B7a) La formule de Pascal donne : $\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}$.

B7b) On déduit pour tout entier $i \geq k+1$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k}^{i-1} \left[\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k} \right] \\
 &= \binom{i-1}{k} - \binom{k-1}{k} \text{ par télescopage} \\
 &= \binom{i-1}{k} \text{ car } \binom{k-1}{k} = 0.
 \end{aligned}$$

B7c) Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, soit $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\ll \forall i \in \llbracket k; n \rrbracket : P(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \gg.$$

- $\mathcal{H}_1$ s'écrit : $\ll \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket : P(S_1 = i) = \frac{1}{n} \binom{i-1}{0} \gg.$

Soit $\ll \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket : P(S_1 = i) = \frac{1}{n} \gg$ vrai puisque $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$.

- Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ un entier quelconque. Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie.
Soit $i \in \llbracket k+1; n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \text{On a } P(S_{k+1} = i) &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) \text{ question B6b)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k} \binom{j-1}{k-1} \text{ par HR} \\ &= \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{i-1}{k} \text{ question B7b)}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- On conclut que $\mathcal{H}_k$ est vraie pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

B8a) L'événement $(T_n > k)$ est réalisé s'il faut plus de k tirages pour que la somme des numéros soit supérieure ou égale à n , ce qui se produit si après k tirages, la somme des numéros est inférieure ou égale à $n-1$, c'est-à-dire si l'événement $(S_k \leq n-1)$ est réalisé.

Ainsi, $(T_n > k) = (S_k \leq n-1)$.

B8b) Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ un entier quelconque.

$$\begin{aligned} P(T_n > k) &= P(S_k \leq n-1) \\ &= \sum_{j=k}^{n-1} P(S_k = j) \\ &= \sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{j-1}{k-1} \text{ question B7c)} \\ &= \frac{1}{n^k} \sum_{j=k}^{n-1} \binom{j-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} \text{ question B7b) avec } i = n \end{aligned}$$

B9 Rappelons que $T_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$. On a donc $E(T_n) = \sum_{k=1}^n kP(T_n = k)$

On a également pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $(T_n > k - 1)$ comme la réunion des événements incompatibles $(T_n = k)$ et $(T_n > k)$, ce qui entraîne que $P(T_n > k - 1) = P(T_n = k) + P(T_n > k)$, soit :

$$P(T_n = k) = P(T_n > k - 1) - P(T_n > k).$$

On déduit que $E(T_n)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n k[P(T_n > k - 1) - P(T_n > k)] \\ &= \sum_{k=1}^n [kP(T_n > k - 1) - kP(T_n > k)] \\ &= \sum_{k=1}^n [kP(T_n > k - 1) - (k + 1)P(T_n > k) + P(T_n > k)] \\ &= \sum_{k=1}^n [kP(T_n > k - 1) - (k + 1)P(T_n > k)] + \sum_{k=1}^n P(T_n > k) \\ &= 1P(T_n > 0) - (n + 1)P(T_n > n) + \sum_{k=1}^n P(T_n > k) \text{ par télescopage} \\ &= P(T_n > 0) - (n + 1)P(T_n > n) + \sum_{k=1}^{n-1} P(T_n > k) + P(T_n > n) \end{aligned}$$

Enfin, $P(T_n > 0) + \sum_{k=1}^{n-1} P(T_n > k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$ par recollement et $P(T_n > n) = 0$ puisque $T_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

On conclut que $E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$.

✓ Cette formule, appelée formule d'anti-répartition est très classique et vraie pour n'importe quelle variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans $\llbracket 1; n \rrbracket$.

En utilisant la question B8b), on déduit :

$$\begin{aligned} E(T_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 1^{n-1-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \text{ par la formule du binôme.} \end{aligned}$$

B10 On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(n-1)\ln(1+\frac{1}{n})}$.

Or, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Donc $(n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n-1}{n} \underset{+\infty}{\sim} 1$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n) = e$.

C11a) On a $\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k)$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{n!} \right) \text{ par télescope}$$

$$= 1.$$

C11b) On a $\sum_{k=1}^n |kP(Y = k)|$

$$= \sum_{k=1}^n k \frac{k-1}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{(k-1)!} \text{ puisque le 1er terme de la somme est nul}$$

$$= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!}$$

On reconnaît la somme partielle d'une série convergente car exponentielle (de paramètre 1). Donc Y admet une espérance.

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(Y = k) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n kP(Y = k) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \\
&= e.
\end{aligned}$$

C12 Soit $k \geq 1$ un entier. En prenant n suffisamment grand, on a $k \leq n-1$, ce qui permet d'appliquer la formule $P(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}$ trouvée en B8b).

$$\begin{aligned}
&\text{On a alors, } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n > k) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k!} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{n^k}
\end{aligned}$$

Or, chacun des k facteurs du numérateur est équivalent à n en $+\infty$.
Donc $(n-1)(n-2)\dots(n-k) \underset{+\infty}{\sim} n^k$.

$$\text{On conclut que } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n > k) = \frac{1}{k!}.$$

C13 Pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = k) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} [P(T_n > k-1) - P(T_n > k)] \\
&= \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \text{ d'après C12} \\
&= \frac{k-1}{k!} \\
&= P(Y = k).
\end{aligned}$$

Si $k \leq 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 = P(Y = k)$.

Finalement, pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = k) = P(Y = k)$.

Les variables aléatoires $(T_n)_{n \geq 1}$ et Y étant discrètes, cela prouve que $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers Y .

C14

```
import numpy.random as rd
def T(n):
    S=0
    y=0
    while S<n:
        tirage=rd.randint(1,n)
        print(tirage)
        S=S+tirage
        y=y+1
    return y
```

C15a) La fonction `freqT` renvoie un vecteur ligne de n colonnes, où la k -ième coordonnée représente la fréquence d'apparition de l'événement ($T_n = k$) lors de la réalisation de 100000 expériences aléatoires, c'est-à-dire la valeur approximative de $P(T_n = k)$ (on sait en effet d'après la loi des grands nombres qu'en effectuant un grand nombre d'expériences aléatoires, la probabilité théorique d'un événement lié à chacune des expériences aléatoires est très proche de sa fréquence statistique).

Ce vecteur est représenté par un diagramme en bâtons, la hauteur du k -ième baton étant égale à la k -ième coordonnée de ce vecteur.

La fonction `loitheoY` renvoie un vecteur ligne de n colonnes, où la k -ième coordonnée vaut $\frac{k-1}{k!}$, c'est-à-dire $P(Y = k)$.

Ce vecteur est représenté par des croix, la hauteur de la k -ième croix étant égale à la k -ième coordonnée de ce vecteur, le graphique se limitant aux entiers $k \in \{1, \dots, 6\}$.

C15b) Les graphiques illustrent que quand n est grand et $k \in \{1, \dots, 5\}$: $P(T_n = k) \approx P(Y = k)$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n = k) = P(Y = k)$.

On retrouve donc le résultat de la question C13.