DM2 cubes
à rendre le lundi / /

Exercice 1

1)Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

a)Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n\ln(n)}$.

b)Calculer $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t$, puis en déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$.

Dans la suite, on considère la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$f(0) = 1$ et $\forall x \neq 0, f(x) = \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$.

2)a)Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

b)Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

3)a)Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$.

b)Etudier le signe de $\ln(1-x) + x$ lorsque $x < 1$. En déduire les variations de f.

c)Dresser le tableau de variation de f en précisant ses limites aux bornes.

Exercice 2

Soit $n \geq 2$ un entier et $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Soit $v = (v_1, ..., v_n)$ un vecteur donné de $\mathbf{R}^n$ vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Soit f l'application définie sur $\mathbf{R}^n$ qui à tout vecteur $x = (x_1, ..., x_n)$ de $\mathbf{R}^n$ associe :

$$f(x) = x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)v.$$

1)a)Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.

b)Calculer $f(v)$, puis montrer que $fof = f$.

2)On pose $F = Vect(e_1 - e_2, e_2 - e_3, ..., e_{n-1} - e_n)$.

a)Montrer que $y \in Imf \iff f(y) = y \iff y \in Ker(f - id)$.

b)A l'aide du théorème du rang, montrer que $dim(Imf) \leq n - 1$.

c)Montrer que pour tout $i \in [\![1; n-1]\!] : e_i - e_{i+1} \in Imf$. Conclure que $F \subset Imf$.

d)Montrer que $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, ..., e_{n-1} - e_n)$ est une base de F. En déduire la dimension de F.

e)Déterminer enfin la dimension de Imf, puis la dimension de $Kerf$.