TD1 - Espaces vectoriels

Exercice 1 ★ ☆ ☆ ☆
Dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on considère les matrices :
$U = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que U est combinaison linéaire de U_1, U_2 et U_3.

Exercice 2 ★ ☆ ☆ ☆
Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, soient $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{u_1} = (1,1,2)$ et $\overrightarrow{u_2} = (1,-1,0)$.
Montrer que $\overrightarrow{u}$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

Exercice 3 ★ ☆ ☆ ☆
Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$, on considère les polynômes :
$P = X^3 + 3X^2 + 2X$, $P_1 = X^3 - X$ et $P_2 = X^3 + X^2$.
Montrer que P est combinaison linéaire de P_1 et P_2.

Exercice 4 ★ ☆ ☆ ☆
Soit F la partie de $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x + 3y - z = 0\right\}.$$

Déterminer des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ de $\mathbf{R}^3$ tels que $F = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)$.
Préciser alors une famille génératrice de F.

Exercice 5 ★ ☆ ☆ ☆
Soit F la partie de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$F = \left\{\begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et déterminer une famille génératrice de F.

Exercice 6 ★ ★ ☆ ☆
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et soit $\mathscr{C}(A)$ la partie de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) | AM = MA\}.$$

Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. [1]

Exercice 7 ★ ☆ ☆ ☆
Soient $\overrightarrow{u_1} = (2,1,3)$, $\overrightarrow{u_2} = (3,5,-2)$ et $\overrightarrow{u_3} = (-6,-17,17)$.
Soit $F = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$.

1)Montrer que $\overrightarrow{u_3}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

2)Trouver une famille génératrice de F constituée de deux vecteurs.

1. $\mathscr{C}(A)$ s'appelle le commutant de A

Exercice 8 ★ ☆ ☆☆
Soient $\overrightarrow{u} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{v} = (3, -5, -1)$ et $\overrightarrow{w} = (0, 1, -2)$.

1)Justifier sans calcul que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille libre.

2)Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une famille libre.

Exercice 9 ★ ☆ ☆☆
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$.

Montrer que (A, B, C) est une famille libre.

Exercice 10 ★ ☆ ☆☆
Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrer que (I, J, K) est une famille liée.

Exercice 11 ★ ☆ ☆☆
On considère les polynômes P, Q et R de $\mathbf{R}_2[X]$ définis par :
$P = X^2 - X + 1$, $Q = -2X^2 + X + 3$ et $R = 4X^2 - 3X - 1$.

1)Vérifier que $-2P + Q + R = 0$.

2)Que peut-on conclure sur la famille (P, Q, R) ?

Exercice 12 ★ ☆ ☆☆
Soient $\overrightarrow{u_1} = (1, 2)$ et $\overrightarrow{u_2} = (2, 3)$.

1)Justifier sans calcul que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une base de $\mathbf{R}^2$.

2)Soit $\overrightarrow{u_3}$ un vecteur de $\mathbf{R}^2$.
Expliquez pourquoi la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ n'est pas une base de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 13 ★ ☆ ☆☆
Soient $\overrightarrow{u_1} = (1, 1, 0, 0)$, $\overrightarrow{u_2} = (0, 1, 1, 0)$, $\overrightarrow{u_3} = (1, 0, 0, 0)$ et $\overrightarrow{u_4} = (1, 1, 1, 1)$.

Montrer que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4})$ est une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 14 ★ ★ ☆☆
Soient $\overrightarrow{u} = (1, 6, 9)$, $\overrightarrow{v} = (1, 4, 6)$ et $\overrightarrow{w} = (3, 6, 2)$.

Montrer que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 15 ★ ★ ☆☆
Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et $F = \left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) | {}^t M = M\right\}$.

1)Citer une base de E. Quelle est la dimension de E ?

2)Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

3)Déterminer une base de F. Quelle est la dimension de F ?

Exercice 16 ★ ☆ ☆☆
Dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on considère les matrices :
$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ et $\mathscr{C} = (U, V, W)$.

1)Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

2)Déterminer les coordonnées de X dans $\mathscr{B}$.

3)Sans utiliser la formule de changement de base, déterminer les coordonnées de X dans $\mathscr{C}$.

Exercice 17 ★★☆☆
On considère les polynômes f_1, f_2, f_3 et u de $\mathbf{R}_2[X]$ définis par :
$f_1 = 1$, $f_2 = X - 1$, $f_3 = (X-1)^2$ et $u = 2X^2 - X + 6$.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ et $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$.
1)Rappeler la dimension de $\mathbf{R}_2[X]$, puis établir que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
2)Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
3)Justifier que P est inversible et déterminer son inverse.
4)Par la formule de changement de base, trouver les coordonnées de u dans $\mathscr{B}'$.

Exercice 18 ★★☆☆
Soient $\overrightarrow{e'_1} = (1,1,2,1)$, $\overrightarrow{e'_2} = (1,-1,0,1)$, $\overrightarrow{e'_3} = (0,0,-1,1)$ et $\overrightarrow{e'_4} = (1,2,2,0)$.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et $\mathscr{B}' = \left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}, \overrightarrow{e'_4}\right)$. On pose $\overrightarrow{u} = (1,1,1,1)$
1)Ecrire la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
2)Montrer que P est inversible et déterminer son inverse. Que déduire pour $\mathscr{B}'$?
3)Par la formule de changement de base, trouver les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans $\mathscr{B}'$.

Exercice 19 ★★☆☆
Soient $\overrightarrow{u_1} = (1,1,-1,-1)$, $\overrightarrow{u_2} = (0,1,0,0)$ et $\overrightarrow{u_3} = (3,-1,-3,-3)$.
Déterminer le rang de la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$.

Exercice 20 ★★☆☆
Déterminer le rang des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 21 ★★★☆
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et F la partie de E définie par :

$$F = \left\{ f \in E | f'' = 2f' - f \right\}.$$

1)Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2)Soit $f \in F$ et soit g la fonction de E définie par $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = f(x)e^{-x}$.
Montrer que $g'' = 0$. En déduire la forme de g, puis la forme de f.
3)Soient f_1 et f_2 les fonctions de E définies par $\forall x \in \mathbf{R}, f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = xe^x$.
Montrer que (f_1, f_2) est une base de F, puis préciser la dimension de F.

Exercice 22 ★★★★
Soient a et b deux réels distincts, soit $n \geq 2$ un entier.
Soit F la partie de $\mathbf{R}_n[X]$ définie par :

$$F = \{ P \in \mathbf{R}_n[X] | P(a) = 0 \text{ et } P(b) = 0 \}.$$

1)Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_n[X]$.
2)Pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, on note $P_k = X^k(X-a)(X-b)$.
a)Vérifier que $\forall k \in [\![0, n-2]\!], P_k \in F$.
b)Montrer que la famille $(P_0, P_1, ..., P_{n-2})$ est libre.
c)Montrer que la famille $(P_0, P_1, ..., P_{n-2})$ est une base de F, puis préciser $dimF$.

Indications / Réponses

Exercice 1

On cherche des réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $U = \lambda_1.U_1 + \lambda_2.U_2 + \lambda_3.U_3$, ce qui se ramène au système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 4 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & -1 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 2

On cherche des réels λ_1 et λ_2 tels que $\overrightarrow{u} = \lambda_1.\overrightarrow{u_1} + \lambda_2.\overrightarrow{u_2}$, ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 1 \\ 2\lambda_1 & & & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 3

On cherche des réels λ_1 et λ_2 tels que $P = \lambda_1.P_1 + \lambda_2.P_2$, ce qui donne après regroupement des termes par degré :

$X^3 + 3X^2 + 2X = (\lambda_1 + \lambda_2)X^3 + \lambda_2 X^2 - \lambda_1 X$.

Et on identifie les termes degré par degré pour obtenir un système ...

Exercice 4

On exprime une lettre au choix en fonction des deux autres (voir exercice de cours).

$z = x + 3y$ donne $F = \text{Vect}\big((1,0,1),(0,1,3)\big)$,

$x = -3y + z$ donne $F = \text{Vect}\big((-3,1,0),(1,0,1)\big)$,

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z$ donne $F = \text{Vect}\big((1,-\frac{1}{3},0),(0,\frac{1}{3},1)\big) = \text{Vect}\big((3,-1,0),(0,1,3)\big)$.

Exercice 5

Voir exercice de cours.

Exercice 6

On montre que $\mathscr{C}(A)$ est non vide et stable par combinaison linéaire (voir exercice de cours).

Exercice 10

Trouver une relation simple entre I, J et K.

Exercice 13

Utiliser le théorème de coïncidence cardinal / dimension.

Exercice 14

Commencer par montrer que $\big(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\big)$ est libre.

Exercice 15

2)Montrer que F est stable par combinaison linéaire.

3)Commencer par trouver une famille génératrice de F en explicitant la forme des matrices de F, puis étudier si elle est libre.

Exercice 16

3)Il faut déterminer les réels a, b et c tels que $X = aU + bV + cW$, ce qui revient à résoudre un système.

Exercice 17

2)$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3)$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4)Les coordonnées de u dans $\mathscr{B}'$ sont $(7,3,2)$.

Exercice 18

1)$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2)$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/4 & 3/4 & 3/4 \\ 1 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

3)Les coordonnées de u dans $\mathscr{B}'$ sont $(1/4, 1/4, 1/2, 1/2)$.

Exercice 19

Commencer par étudier la liberté de la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$.

Exercice 20

Le plus simple est de transformer par Gauss A et B en des matrices triangulaires.

Exercice 21

1)Montrer que F est stable par combinaison linéaire.
3)Montrer d'abord que (f_1, f_2) est libre.

Exercice 22

1)Montrer que F est stable par combinaison linéaire.
2)c)Il reste à établir que $(P_0, P_1, ..., P_{n-2})$ est une famille génératrice de F : prendre alors P quelconque dans F, puis montrer que le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ est nul.