Concours blanc cubes ecg2 maths appliquées - 2025

EXERCICE 1

Partie I- Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre

On considère l'application $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in [0,1]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} -t\ln(t) & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0,1]$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 g(t)\mathrm{d}t$.
3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$.

Partie II- Exemple de densité

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} -t\ln t + t^{1/3} & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
   Est-ce que f est continue en 1 ?
2. Etablir que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.
3. Montrer que f est une densité.
4. (a) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0,1[$ et calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout $t \in]0,1[$.
   (b) En déduire que l'équation $f'(t) = 0$ d'inconnue $t \in]0,1[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$.
   (c) Informatique.
   On suppose importé le module `numpy` d'alias `np`.
   On appelle `fprime` la fonction de paramètre t réel et renvoyant la valeur de $f'(t)$.
   Compléter le programme `Python` ci-dessous pour qu'il affiche une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

```
import numpy as np
def fprime(t):
    y=.................
    return y
a=1/np.exp(1)
b=1
while b-a .......... :
    c=(a+b)/2
    if fprime(c)<0:
        ..........
    if fprime(c)>0:
        ..........
print(c)
```

Partie III- Calcul d'une fonction de répartition

On admet qu'il existe une variable aléatoire X ayant f pour densité (l'application f a été définie au début de la partie **II**) et on note F la fonction de répartition de X.

1. Calculer, pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$ (utiliser le résultat obtenu à la question **I.2.**)
2. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de F.

Partie IV- Etude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles

On note D l'ensemble des couples (x, y) appartenant à $]0, +\infty[^2$ tels que $x + y < 1$ et $2x < 1$.
On considère l'application $G : D \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'ouvert D, définie par :

$$\forall (x,y) \in D,\ G(x,y) = f(x+y) - \frac{1}{2} f(2x)$$

1. Représenter l'ensemble D.
2. Justifier soigneusement que f est de classe C^1 sur D, puis calculer, pour tout $(x, y) \in D$, les dérivées partielles premières de G en (x, y), en fonction de x, y et f'.
3. Soit $(x, y) \in D$. Montrer que (x, y) est un point critique de G si et seulement si :
$$f'(2x) = 0 \text{ et } f'(x+y) = 0$$
4. En déduire que G admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$, le réel α ayant été défini en **II 4.b.**.
5. Est-ce que G admet un extremum local ?

2 EXERCICE

On étudie l'exponentielle d'une matrice pour une matrice carrée d'ordre 3, puis d'ordre 2.

2.1 Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrice définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}
2. On pose $T = P\,A\,P^{-1}$.
   a) Calculer la matrice T
   b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour out entier naturel $n \geq 3$.
3. En déduire que :
   $$\forall n \geq 3, \quad A^n = 0$$
   où 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3.
4. Pour tout réel t, on définit la matrice $E(t)$ par :
   $$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$
   où I désigne la matrice unité d'ordre 3.
   a) Montrer que :
   $$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)\,E(t') = E(t + t')$$
   b) Pour tout t réel, calculer $E(t)\,E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$.
   c) Pour tout t réel et tout entier naturel n, déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$ et n.

2.2 Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n et pour tout réel t, on définit la matrice $E_n(t)$ par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}B^k \text{ que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que B est diagonalisable.
2. Déterminer une matrice Q d'ordre 2, inversible telle que
   $$Q^{-1}BQ = D$$

3. Pour tout entier naturel n, montrer que :

$$B^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$$

exprimer de même $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$ sous le forme d'une somme.

5. Déterminer les limites de $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Pour tout t réel, on pose alors :

$$E(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) \end{pmatrix}$$

a) Montrer que

$$E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

b) Déterminer les matrice E_1 et E_2, telles que pour tout t réel on ait :

$$E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$$

c) Calculer E_1^2, E_2^2, E_1E_2, E_2E_1.

d) En déduire que pour tout t réel, $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe :

$$f(x) = \int_0^x \ln\left(1+t^2\right) dt.$$

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie I : étude de f

1) a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.

   b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

   c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).

2) a) Montrer que f est impaire.

   b) Etudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

3) a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}.$$

   b) Grâce à une intégration par parties, en déduire que pour tout réel x, on a :

$$f(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$$

4) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

   a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est une intégrale convergente.

   b) En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)$.

   c) Vérifier que pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

   Etablir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x)$$

   d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

   a) Montrer que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.
   On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour f, c'est à dire :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

   b) Déterminer $f(0), f'(0), f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

   c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

6) a) Question rajoutée par rapport au sujet original. En utilisant la loi uniforme à densité sur $[0,1]$, interpréter $f(1)$ comme l'espérance d'une variable aléatoire.

b) Informatique.
On suppose importés le modules `numpy` d'alias `np` et le module `numpy.random` d'alias `rd`.
On rappelle qu'en `Python`, la fonction `rd.random()` renvoie un réel aléatoire de $[0,1]$.
Compléter le script `Python` suivant pour qu'il calcule et affiche une valeur approchée de $f(1)$:

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
U=[................. for k in range(100000)]
V=np.log(U)
f=............
print(f)
```

Partie II : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$.

7) a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.

8) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

9) a) Etablir l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$$

b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

10) a) Montrer que :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}.$$

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt.$

c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt.$$

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt.$$

e) Modifier le script présenté à la question 6)b) pour donner une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.