Exercice 1 (ecricome 2018)

Partie I :(Original modifié !)

1)a)$A^2-7A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$.

1)b)On remarque que $A^2 - 7A = -12I$, c'est-à-dire $A^2 - 7A + 12I = 0$.
$P(X) = X^2 - 7X + 12$ est donc un polynôme annulateur de A.

Le spectre de A est donc inclus dans l'ensemble des racines de P, lesquelles sont 3 et 4 (faire un calcul de Δ).

1)c)Les seules valeurs propres possibles de A sont 3 et 4. Vérifions qu'elles le sont réellement en cherchant les sous-espaces propres associés.

$E_3(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A-3I)U = 0\}$.Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$U \in E_3(A) \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = y - 2z$$

$$\text{Donc } E_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y - 2z \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$E_3(A)$ est non nul donc 3 est bien valeur propre de A.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_3(A)$.

Elle est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.
C'est donc une base de $E_3(A)$.

$E_4(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A-4I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$U \in E_4(A) \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrrrrr} -2x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} y & = 0 \\ x & = -z \end{array} \right.$$

$$E_4(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 0 \text{ et } x = -z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right).$$

$E_4(A)$ est non nul donc 4 est bien valeur propre de A.

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_4(A)$.

Elle est libre car constituée d'un unique vecteur non nul.
C'est donc une base de $E_4(A)$.

1)d)0 n'est pas valeur propre de A donc A est inversible.

Les sous-espaces propres $E_3(A)$ et $E_4(A)$ sont de dimensions 2 et 1.
La somme de leurs dimensions vaut 3 et coïncide avec la taille de A.
Donc A est diagonalisable d'après le théorème de réduction.

2)a)Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbf{R}^3$ et $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sa matrice colonne dans la base canonique.

$u \in Kerf$
$\iff f(u) = 0$
$\iff BU = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrrrrrl} x & - & y & - & z & = & 0 & L_1 \\ -3x & + & 3y & - & 3z & = & 0 & L_2 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 & L_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrrrrrl} x & - & y & - & z & = & 0 & L_1 \\ & & & - & 6z & = & 0 & L_2 \to L_2 + 3L_1 \\ & & & & 0 & = & 0 & L_3 \to L_1 + L_3 \end{array} \right.$$

$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$

$Kerf = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y \text{ et } z = 0\right\} = \{(y,y,0), y \in \mathbf{R}\} = \text{Vect }((1,1,0))$.
$((1,1,0))$ est une famille génératrice de $Kerf$. Elle est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $Kerf$.

2)b)$Kerf \neq \{(0,0,0)\}$ donc f n'est pas bijective.

Or, $B = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$ donc B n'est pas inversible, ce qui prouve que 0 est valeur propre de B.

$E_0(B) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid BU = 0\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ en reprenant les calculs faits dans la question 2)a).

2)c)$B - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de $B - 2I$, on a :

$rg(B - 2I) = dim\text{Vect }(C_1, C_2, C_3)$.

Comme $C_1 = C_3$, on a $\text{Vect }(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect }(C_1, C_2)$.

Enfin, (C_1, C_2) est une famille génératrice de $\text{Vect }(C_1, C_2)$ et libre car C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $\text{Vect }(C_1, C_2)$.
Ainsi, $\text{Vect }(C_1, C_2)$ est de dimension 2, puis $rg(B - 2I) = 2$.

2)d)Le vecteur colonne de $f(e_1 - e_2 - e_3)$ dans la base canonique est :
$B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Donc $f(e_1 - e_2 - e_3) = 3e_1 - 3e_2 - 3e_3$.

2)e)D'après 2)c), $B - 2I$ n'est pas inversible car n'est pas de rang 3.
Donc 2 est valeur propre de B.

D'après 2)d), $f(e_1 - e_2 - e_3) = 3(e_1 - e_2 - e_3)$.

Cette égalité se traduit matriciellement par : $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

ce qui prouve que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B et que 3 est valeur propre de B.

D'après 2)b), 0 est valeur propre de B.

On conclut que 0, 2 et 3 sont valeurs propres de B.

$B \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ possède 3 valeurs propres distinctes. Donc B est diagonalisable.

3)• D'après la question 2) :

$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_3(B)$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_0(B)$,

Enfin, $U_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2(B)$ car $(B-2I)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La famille $\mathscr{C} = (U_1, U_2, U_3)$ est libre car constituée de vecteurs propres de B associés à des valeurs propres différentes.

C'est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ dont le cardinal coïncide avec la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, c'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

Cela confirme que B est diagonalisable (ce qu'on savait déjà !)

• Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

D'après le cours, on a : $B = PD_2P^{-1}$ ou encore $D_2 = P^{-1}BP$.

La première contrainte est donc satisfaite.

La deuxième contrainte l'est également en regardant P.

Il reste à vérifier la troisième contrainte.

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs de $E_3(A)$.

C'est acquis pour le deuxième vecteur (voir question 1)c)).

Quant au premier vecteur, on vérifie que $A\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de 2 vecteurs de $E_3(A)$. Ce cardinal coïncide avec la dimension de $E_3(A)$, c'est donc une base de $E_3(A)$.

Enfin, $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_4(A)$ grâce à la question 1)c).

Posons $D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Le cours donne : $A = PD_1P^{-1}$, c'est-à-dire : $D_1 = P^{-1}AP$.

Partie II :

1)Constatons d'abord que $D_1 = P^{-1}AP \iff D_1P^{-1} = P^{-1}APP^{-1}$
$\iff D_1P^{-1} = P^{-1}A$.
De même, on a : $D_2 = P^{-1}BP \iff D_2P^{-1} = P^{-1}B$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :
$Y_{n+2} = P^{-1}X_{n+2} = P^{-1}\left(\dfrac{1}{6}AX_{n+1} + \dfrac{1}{6}BX_n\right) = \dfrac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \dfrac{1}{6}P^{-1}BX_n$
$= \dfrac{1}{6}D_1P^{-1}X_{n+1} + \dfrac{1}{6}D_2P^{-1}X_n = \dfrac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \dfrac{1}{6}D_2Y_n$.

2)$Y_{n+2} = \dfrac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \dfrac{1}{6}D_2Y_n$

$$\iff \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{n+1} \\ \frac{1}{2}b_{n+1} \\ \frac{2}{3}c_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n \\ 0 \\ \frac{1}{3}c_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ \frac{1}{2}b_{n+1} \\ \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+2} & = & \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ \\ b_{n+2} & = & \frac{1}{2}b_{n+1} \\ \\ c_{n+2} & = & \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n \end{array} \right.$$

3)On rappelle que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie aisément que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ce qui prouve que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Enfin, $Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Et $Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4)• On a $\forall n \in \mathbf{N}, b_{n+2} = \dfrac{1}{2}b_{n+1}$ ou encore $\forall n \in \mathbf{N}^*, b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n$, ce qui signifie que la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est géométrique.

On a donc $\forall n \in \mathbf{N}^*, b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} b_1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \times 1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Or, $b_0 = 2$, l'égalité ci-dessus est donc encore vraie pour $n = 0$.

Finalement, $\forall n \in \mathbf{N}, b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

• La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est linéaire d'ordre deux d'équation caractéristique :

$x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = 0$, équivalente à $2x^2 - x - 1 = 0$.

Ses racines sont 1 et $-\dfrac{1}{2}$.

D'après le cours, il existe des réels α et β tels que :

$\forall n \in \mathbf{N}, a_n = \alpha 1^n + \beta\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = \alpha + \beta\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Cette égalité donne pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha + \beta \\ a_1 = \alpha - \frac{1}{2}\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha + \beta & L_1 \\ 1 = \alpha - \frac{1}{2}\beta & L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha + \beta & L_1 \\ 1 = \frac{3}{2}\beta & L_2 \to L_1 - L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{4}{3} \\ \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}, a_n = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

• La suite $(c_n)_{n\geq 0}$ est linéaire d'ordre deux d'équation caractéristique :

$x^2 - \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3} = 0$, équivalente à $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Ses racines sont 1 et $-\dfrac{1}{3}$.

D'après le cours, il existe des réels α et β tels que :

$\forall n \in \mathbf{N}, c_n = \alpha 1^n + \beta\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = \alpha + \beta\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Cette égalité donne pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$\begin{cases} c_0 = \alpha + \beta \\ c_1 = \alpha - \frac{1}{3}\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta & L_1 \\ -1 = \alpha - \frac{1}{3}\beta & L_2 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} 1 & = & \alpha+\beta \quad L_1 \\ 2 & = & \frac{4}{3}\beta \quad L_2 \to L_1 - L_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha & = & -\frac{1}{2} \\ & & \\ \beta & = & \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}, c_n = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

5)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}, \text{ ce qui mène à :}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{6} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n - \dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \\ -\dfrac{4}{3} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ -\dfrac{11}{6} - \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

6)a)Programme :

```
import numpy as np
def X(n):
    Xold=np.array(([3],[0],[-1]))
    Xnew=np.array(([3],[0],[-2]))
    A=np.array(([2,1,-2],[0, 3,0],[1,-1,5]))
    B=np.array(([1,-1,-1],[-3,3,-3],[-1,1,1]))
    for i in range(n-1):
        Aux=1/6*np.dot(A,Xnew)+1/6*np.dot(B,Xold)
        Xold=Xnew
        Xnew=Aux
    return Aux
```

6)b)Grâce à la question 5), on a pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$\alpha_n = \dfrac{11}{6} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n - \dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$,

$\beta_n = -\dfrac{4}{3} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$,

$\gamma_n = -\dfrac{11}{6} - \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Comme $-1 < -\dfrac{1}{2} < -\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} < 1$, on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n} = 0.$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{11}{6}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = -\dfrac{4}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = -\dfrac{11}{6}$.
La suite (α_n) est la suite du haut, la suite (β_n) est celle du milieu et (γ_n) est celle du bas.

Exercice 2 (ecricome 2018)

Partie I : Etude de deux suites

1)a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0} x+1 = 1$ et $\lim\limits_{t\to 0} \ln t = 0$. Par composition, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x+1) = 0$.

Par somme et différence, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Quand $x \to +\infty$ les logarithmes donnent une FI $(+\infty) - (+\infty)$.

On écrit : $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \big(\ln(x+1) - \ln x\big) = \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

$= \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{t\to 1} \ln t = 1$. Par composée, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Par différence, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

1)b) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme, inverse et composée de fonctions dérivables et pour tout $x > 0$, on a :

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x(x+1)^2} > 0.$

On déduit le tableau de variations de f :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0$

1)c) Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= f(n). \end{aligned}$$

1)d)$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_{n+1} - u_n = f(n) \leq 0$ d'après le tableau de variations de f.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est donc décroissante.

1)e)On utilise l'égalité $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$:

```
from numpy import log
def u(n):
    L=[1/k for k in range(1,n+1)]
    y=sum(L)-log(n)
    return y
```

2)a)Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n - \frac{1}{n}\right) \\
&= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= f(n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= \cancel{\frac{1}{n+1}} + \ln(n) - \ln(n+1) + \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

2)b)La fonction $g : x \mapsto \ln(x+1)$ est concave sur $]-1, +\infty[$ car
$\forall x > -1, g'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ puis $g''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} < 0$.
$\mathscr{C}_g$ est donc en dessous de toutes ses tangentes.
Or, la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 a pour équation :
$y = g'(0)x + g(0)$, c'est-à-dire $y = x$.
Ainsi, $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$.

✓ On pouvait aussi étudier les variations, puis le signe de la fonction $x \mapsto x - \ln(x+1)$.

En appliquant cette inégalité avec $x = \dfrac{1}{n}$, on obtient pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:
$\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}$, ce qui donne $v_{n+1} - v_n \geq 0$ grâce à la question 2)a).
Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

2)c)Le DL de $\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2 est : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

On déduit : $x - \ln(1+x) = \dfrac{x^2}{2} - o(x^2)$.

Donc quand $x \to 0$, $x - \ln(1+x) \sim \dfrac{x^2}{2}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, il est licite d'utiliser l'égalité ci-dessus avec $x = \dfrac{1}{n}$, ce qui donne : $\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{2n^2}$, c'est-à-dire $v_{n+1} - v_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$.

2)d)La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{2n^2}$ converge car elle a même nature que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$, laquelle converge en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$.

Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \big(v_{n+1} - v_n\big)$ converge.

2)e)Par télescopage, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \big(v_{k+1} - v_k\big) = v_n - v_1 = v_n - (u_1 - 1) = v_n$.

D'après 2)d), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \big(v_{k+1} - v_k\big) = \gamma$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \gamma$.

3)a)On sait que $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = v_n + \dfrac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \gamma$. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \gamma$.

3)b)$(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante et converge vers γ donc $\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n \leq \gamma$.

$(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante et converge vers γ donc $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n \geq \gamma$.

Par recollement des inégalités, on a $\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n \leq \gamma \leq u_n$.

Comme $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$, on déduit : $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n - \dfrac{1}{n} \leq \gamma \leq u_n$,

d'où $0 \leq u_n - \gamma \leq \dfrac{1}{n}$. Donc $\forall n \in \mathbf{N}^*, |u_n - \gamma| \leq \dfrac{1}{n}$.

3)c)Remarquons que
$$\begin{aligned} n = \left\lfloor \frac{1}{eps} \right\rfloor + 1 &\iff \left\lfloor \frac{1}{eps} \right\rfloor = n - 1 \\ &\iff n - 1 \leq \frac{1}{eps} < n \\ &\iff \frac{1}{n} < eps \leq \frac{1}{n-1} \quad (*) \end{aligned}$$

On sait par ailleurs que $|u_n - \gamma| \leq \dfrac{1}{n}$.

Ainsi, en prenant $n = \left\lfloor \dfrac{1}{eps} \right\rfloor + 1$, on a grâce à $(*)$: $|u_n - \gamma| \leq eps$, ce qui permet de conclure que u_n sera une valeur approchée de γ à eps près.

Partie II : Etude de d'une série

1)$a_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^2}$ converge.

D'après le critère d'équivalence sur les séries de terme général positif, on conclut que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

2)a)Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\
&= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.
\end{aligned}$$

On déduit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$.

2)b)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$a_n = \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{2n-(2n-1)}{n(2n-1)} = \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}(2n-1)} - \frac{\cancel{2n-1}}{n(\cancel{2n-1})} = \frac{-1}{n} + \frac{2}{2n-1}.$$

2)c)On déduit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-1}{k} + \frac{2}{2k-1}\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right) \text{ grâce à la question II)2)a)} \\
&= 2\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \text{ par Chasles.}
\end{aligned}$$

3)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$
\begin{aligned}
u_{2n} - u_n + \ln 2 &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) + \ln 2 \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \big(\cancel{\ln 2} + \cancel{\ln(n)}\big) + \cancel{\ln(n)} + \cancel{\ln 2} \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.
\end{aligned}
$$

3)b)
$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} a_k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \text{ d'après II)2)c)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2\big(u_{2n} - u_n + \ln 2\big) \text{ d'après II)3)a)} \\
&= 2\big(\gamma - \gamma + \ln 2\big) \text{ d'après I)3)a)} \\
&= 2\ln 2.
\end{aligned}
$$

4)a)A l'aide du changement d'indice $j = k - n$ (ou $k = n + j$), on obtient :

$$
\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\big(1+\frac{k}{n}\big)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.
$$

4)b)Soit $h : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $S_n(h,0,1)$ la somme de Riemann de h sur $[0,1]$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} a_k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \text{ d'après II)4)a)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2S_n(h,0,1) \\
&= 2\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x \\
&= 2[\ln(1+x)]_0^1 \\
&= 2\ln 2.
\end{aligned}
$$

Exercice 3 (ecricome 2018)

Partie I : ($n = 3$ et $p = 2/3$)

1)L'expérience est constituée de 3 épreuves (épreuve=lancer) successives et indépendantes.
A chaque épreuve, la probabilité de succès (pile) vaut 2/3.
X compte le nombre de succès.
Donc $X \hookrightarrow \mathscr{B}(3, 2/3)$.
Ainsi, $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$ et $\forall k \in [\![0, 3]\!], P(X = k) = \binom{3}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{3-k}$
A est réalisé si et seulement si $X = 0$ ou $X = 2$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } P(A) &= P\big((X=0) \cup (X=2)\big)\\ &= P(X=0) + P(X=2)\\ &= \binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\\ &= \frac{1}{27} + 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3}\\ &= \frac{13}{27}.\end{aligned}$$

2)On a les égalités $(X = 0) = (G = 0)$, $(X = 1) = (G = -10)$, $(X = 2) = (G = 20)$ et $(X = 3) = (G = -30)$.
Donc $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$.
De plus, $P(G = -30) = P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{8}{27}$,
$P(G = -10) = P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3 \times \frac{2}{27} = \frac{2}{9}$,
$P(G = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{27}$ et $P(G = 20) = P(X = 2) = \frac{4}{9}$.

3)$E(G)$
$= -30P(G = -30) - 10P(G = -10) + 0P(G = 0) + 20P(G = 20)$
$= -30 \times \frac{8}{27} - 10 \times \frac{2}{9} + 20 \times \frac{4}{9}$
$= -\frac{80}{9} - \frac{20}{9} + \frac{80}{9}$
$= -\frac{20}{9}$.
$E(G) < 0$ donc le jeu est défavorable au joueur.

Partie II : ($n \in \mathbf{N}$ et $0 < p < 1$)

1)a)$Y(\Omega) = \{-1, 1\}$.

$Y = -1 \iff Z = 0$ et $Y = 1 \iff Z = 1$. Donc $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.

Z suit donc une loi de Bernoulli.
Son paramètre est $P(Z = 1) = P(Y = 1) = P(X\text{pair}) = P(A)$.

1)b)De $Z = \dfrac{Y+1}{2}$, on déduit : $Y = 2Z - 1$.
Par linéarité de l'espérance, $E(Y) = 2E(Z) - 1 = 2P(A) - 1$.

2)a)Par le même argument que I)1) : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.
Ainsi, $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!], P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

2)b)X est discrète finie donc Y admet une espérance donnée par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E\left((-1)^X\right) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} (-1)^x P(X = x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Puis, $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k}$.

La formule du binôme donne alors : $E(Y) = (-p + (1-p))^n = (1-2p)^n$.

3)De $E(Y) = 2P(A) - 1$, on tire : $P(A) = \dfrac{E(Y)+1}{2}$.

Puis, grâce à 2)b), on déduit : $P(A) = \dfrac{(1-2p)^n + 1}{2}$.

4)$P(A) \geq \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{(1-2p)^n + 1}{2} \geq \dfrac{1}{2} \iff (1-2p)^n \geq 0$.

$-$ si $p \leq \dfrac{1}{2}$, on a : $1 - 2p \geq 0$ donc $(1-2p)^n \geq 0$,

$-$ si $p > \dfrac{1}{2}$, on a : $1 - 2p < 0$ et $(1-2p)^n \geq 0 \iff n\text{pair}$.

Finalement, $P(A) \geq \dfrac{1}{2} \iff p \leq \dfrac{1}{2}$ ou n est pair.

Partie III :

1)D'après l'énoncé, $G = \begin{cases} 10X & \text{si } X \text{ est pair,} \\ -10X & \text{si } X \text{ est impair.} \end{cases}$

Or, $Y = (-1)^X = \begin{cases} X & \text{si } X \text{ est pair,} \\ -X & \text{si } X \text{ est impair.} \end{cases}$

Donc $G = 10YX = 10(-1)^X X$.

$(-1)^X X$ étant discrète finie, $(-1)^X X$ admet une espérance donnée par le théorème de transfert :

$$E\big((-1)^X X\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} (-1)^x x P(X = x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k P(X = k).$$

Puis, par linéarité, G admet une espérnace donnée par :

$E(G) = 10E\big((-1)^X X\big)$, soit $E(G) = 10\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k P(X = k)$.

2)Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

3)On rappelle que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

De la question III)1), on déduit :

$$E(G) = 10\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 10\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

car le premier terme de la somme est nul.

La question III)2) donne alors :

$$E(G) = 10\sum_{k=1}^{n} (-1)^k n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = 10n\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

En posant $j = k - 1$ dans cette somme, on obtient :

$$\begin{aligned} E(G) &= 10n\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{n-j-1} \\ &= 10n\sum_{j=0}^{n-1} -(-1)^j \binom{n-1}{j} p^j p (1-p)^{n-1-j} \\ &= -10np\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} \\ &= -10np\big(p + (1-p)\big)^{n-1} \text{ par le binôme de Newton} \\ &= -10np(1-2p)^{n-1}. \end{aligned}$$

4) $\left\{\begin{array}{l} P(A) \geq \dfrac{1}{2} \\ \text{et} \\ E(G) \leq 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} p \leq \dfrac{1}{2} \text{ ou n pair} \\ \text{et} \\ (1-2p)^{n-1} \geq 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} p \leq \dfrac{1}{2} \text{ et } (1-2p)^{n-1} \geq 0 \\ \text{ou} \\ \text{n pair et } (1-2p)^{n-1} \geq 0. \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l} p \leq \dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \text{n pair et } (1-2p)^{n-1} \geq 0. \end{array}\right.$

Puis, $\big(n \text{ pair et } (1-2p)^{n-1} \geq 0\big) \iff \big(n-1 \text{ impair et } (1-2p)^{n-1} \geq 0\big)$
$\implies 1-2p \geq 0 \iff p \leq \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, la condition $\big(n \text{ pair et } (1-2p)^{n-1} \geq 0\big)$ entraîne $p \leq \dfrac{1}{2}$.

Donc $\left\{\begin{array}{l} p \leq \dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \text{n pair et } (1-2p)^{n-1} \geq 0. \end{array}\right. \iff p \leq \dfrac{1}{2}$.

Finalement, $\left\{\begin{array}{l} P(A) \geq \dfrac{1}{2} \\ \text{et} \\ E(G) \leq 0 \end{array}\right. \iff p \leq \dfrac{1}{2}$.

5)a)f est polynomiale donc dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot (1-2x)^{n-1} + x \cdot (-2)(n-1) \cdot (1-2x)^{n-2} \\ &= \big((1-2x) - 2(n-1)x\big)(1-2x)^{n-2} \\ &= (1-2nx)(1-2x)^{n-2}. \end{aligned}$$

$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], (1-2x)^{n-2} \geq 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-2nx$.

$f'(x) \geq 0 \iff 1-2nx \geq 0 \iff x \leq \dfrac{1}{2n}$.

D'où le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{1}{2n}$		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2n}\right)$	$\searrow$	0

Avec $f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

5)b)Pour optimiser la rentabilité de son activité, le concepteur du jeu doit rendre $E(G)$ la plus grande possible en valeur absolue, ce qui revient à maximaliser f, compte tenu de la question III)3).
il doit donc prendre $p = \frac{1}{2n}$

Partie IV :

1)Pour tout $i \in [\![1, 200]\!]$, notons X_i la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus par le i-ième joueur.
On sait d'après I)1) que $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(2, \frac{1}{4})$.
On a donc $\forall k \in [\![0, 2]\!], P(X_i = k) = \binom{2}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{2-k}$.
Par construction de G_i, on a :
$(X_i = 0) = (G_i = 0)$, $(X_i = 1) = (G_i = -10)$ et $(X_i = 2) = (G_i = 20)$.
Donc $G_i(\Omega) = \{-10, 0, 20\}$.
Puis, $P(G_i = -10) = P(X_i = 1) = \binom{2}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{8}$,
$P(G_i = 0) = P(X_i = 0) = \binom{2}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$,
$P(G_i = 20) = P(X_i = 2) = \binom{2}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{16}$.
G_i est discrète finie donc admet une espérance donnée par :
$E(G_i) = -10P(G_i = -10) + 0P(G_i = 0) + 20P(G_i = 20)$
$= -10 \times \frac{3}{8} + 20 \times \frac{1}{16} = -\frac{5}{2}$.
$E(G_i^2) = (-10)^2 P(G_i = -10) + 0^2 P(G_i = 0) + 20^2 P(G_i = 20)$
$= 100 \times \frac{3}{8} + 400 \times \frac{1}{16} = \frac{125}{2}$.
Enfin, la formule de Koënig donne :
$V(G_i) = E(G_i^2) - E(G_i)^2 = \frac{125}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{225}{4}$.

2)$J = -\sum_{i=1}^{200} G_i$.
Par linéarité de l'espérance, J admet une espérance donnée par :
$E(J) = -\sum_{i=1}^{200} E(G_i) = -\sum_{i=1}^{200} \left(-\frac{5}{2}\right) = 200 \times \frac{5}{2} = 500$.
$V(J) = V\left(-\sum_{i=1}^{200} G_i)\right) = (-1)^2 V\left(\sum_{i=1}^{200} G_i\right) = V\left(\sum_{i=1}^{200} G_i\right)$.
Puis, par indépendance des variables aléatoires G_i :
$V(J) = \sum_{1=1}^{200} V(G_i) = \sum_{i=1}^{200} \frac{225}{4} = 200 \times \frac{225}{4} = 11250$.

3)Si $J \leq 100$, alors $J-500 \leq -400$ donc $|J-500| \geq 400$.
En terme d'événements, on a donc l'inclusion :
$(J \leq 100) \subset (|J-500| \geq 400)$.

Par croissance de la probabilité, on déduit :

$P(J \leq 100) \leq P(|J-500| \geq 400)$.

4)Inégalité de Bienaymé-Tchébychev :
Soit X une variable aléatoire admettant une espérance et une variance.

Alors, $\forall \epsilon > 0, P\left(|X-E(X)| \geq \epsilon\right) \leq \dfrac{V(X)}{\epsilon^2}$.
Cette inégalité avec $X \to J$ et $\epsilon = 400$ donne :
$P\left(|J-E(J)| \geq 400\right) \leq \dfrac{V(J)}{400^2}$, c'est-à-dire : $P\left(|J-500| \geq 400\right) \leq \dfrac{11250}{160000}$.
Enfin, $\dfrac{11250}{160000} = \dfrac{9}{128}$ et $P(J \leq 100) \leq P(|J-500| \geq 400)$.
Donc $P(J \leq 100) \leq \dfrac{9}{128}$.
5)$\dfrac{9}{128} < \dfrac{10}{100}$ donc $P(J \leq 100) \leq \dfrac{10}{100}$.
La probabilité pour que le forain gagne moins de 100 euros dans la journée est donc inférieure à 10%.
Le forain peut donc installer son stand !