Exercice 1 (ecricome 2009)

I)1)Pour tous réels a, b et c, on a :

$$M(a,b,c) = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_2} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U_3}.$$

Donc $E = \text{Vect}\,(U_1, U_2, U_3)$. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

2)(U_1, U_2, U_3) est une famille génératrice de E.

De plus, pour tous réels a, b et c, on a :

$$aU_1 + bU_2 + cU_3 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = b = c = 0.$$

Donc (U_1, U_2, U_3) est libre.

C'est une famille libre et génératrice de E donc une base de E. Et $dimE = 3$.

II)1)$M(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est tringulaire.

Ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux 1, 2 et 3.

2)Il faut chercher les sous-espaces propres de $M(1,2,3)$.

Pour les calculs ci-dessous, on pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

• $E_1\,(M(1,2,3)) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (M(1,2,3) - I)\,U = 0\}$.

$$(M(1,2,3) - I)\,U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{array} \right.$$

$\Longleftrightarrow y = z = 0$.

$$\text{Donc } E_1\,(M(1,2,3)) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

• $E_2\,(M(1,2,3)) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (M(1,2,3) - 2I)\,U = 0\}$.

$$(M(1,2,3) - 2I)\,U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

$\Longleftrightarrow z = 0$ et $x = y$.

$$\text{Donc } E_2\,(M(1,2,3)) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z = 0 \text{ et } x = y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

• $E_3\,(M(1,2,3)) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (M(1,2,3) - 3I)\,U = 0\}$.

$$(M(1,2,3) - 3I)\,U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2x + y + z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{array} \right.$$

$\Longleftrightarrow y = 2z$ et $x = \frac{3}{2}z$.

$E_3\left(M(1,2,3)\right)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \mid y=2z \text{ et } x=\frac{3}{2}z\right\}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{3}{2}z\\2z\\z\end{pmatrix},z\in\mathbf{R}\right\}=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}3/2\\2\\1\end{pmatrix}\right).$

Ou encore : $E_3\left(M(1,2,3)\right)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}\right).$

$M(1,2,3)\in\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ possède 3 valeurs propres, elle est donc diagonalisable.
On peut donc l'écrire sous la forme réduite : $M(1,2,3)=PDP^{-1}$ où :

– D est diagonale portant sur sa diagonale les valeurs propres de $M(1,2,3)$,

– P est inversible, ses colonnes formées des bases des sous-espaces propres de $M(1,2,3)$.

On peut prendre $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&4\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Enfin, l'égalité $M(1,2,3)=PDP^{-1}$ s'écrit aussi $D=P^{-1}M(1,2,3)P$.

3)On détermine P^{-1} par la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\leftarrow L_2-L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\leftarrow L_3-2L_1\\L_2\leftarrow L_2-2L_3\\L_3\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1/2\\0&1&-2\\0&0&1/2\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\leftarrow 1/2L_1\\L_2\\L_3\leftarrow 1/2L_3\end{matrix}.$$

Donc $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1/2\\0&1&-2\\0&0&1/2\end{pmatrix}$.

De l'égalité $M(1,2,3)=PDP^{-1}$, on déduit par récurrence très classique :

$$\begin{aligned}&(M(1,2,3))^n\\&=PD^nP^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1/2\\0&1&-2\\0&0&1/2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2^n&3^{n+1}\\0&2^n&4\times3^n\\0&0&2\times3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1/2\\0&1&-2\\0&0&1/2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2^n-1&\frac{1}{2}-2^{n+1}+\frac{1}{2}\times3^{n+1}\\0&2^n&2\times3^n-2^{n+1}\\0&0&3^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

III)1)$J = M(1,1,1) - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier $n \geq 3$, on déduit : $J^n = J^3 J^{n-3} = 0 J^{n-3} = 0$.

2)A partir de l'égalité $M(1,1,1) = J + I_3$, on peut appliquer la formule du binôme car J et I_3 commutent, ce qui donne pour tout entier $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}
(M(1,1,1))^n &= (J + I_3)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} J^k I_3^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} J^k \\
&= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} J^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} J^1 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} J^2 + \sum_{k=3}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \underbrace{J^k}_{=0} \\
&= I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.
\end{aligned}$$

Pour $n = 0$, l'égalité s'écrit : $(M(1,1,1))^0 = I_3$, ce qui est vrai.

Et pour $n = 1$: $(M(1,1,1))^1 = I_3 + J$, ce qui est vrai aussi.

> Remarque
> $M(1,1,1)^2 = (I_3 + J)^2 = I_3 + 2J + J^2$. Donc l'égalité demandée est encore vraie pour $n = 2$.

3)On déduit :

$$\begin{aligned}
(M(1,1,1))^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

IV)1)Pour tous réels x, y et z, on a :

$$\begin{aligned}
xu + yv + zw = 0 &\iff x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(2,1,1) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
&\iff x = y = z = 0.
\end{aligned}$$

Donc la famille (u, v, w) est libre. C'est une famille libre de $\mathbf{R}^3$ de cardinal 3. Ce cardinal coincide avec la dimension de $\mathbf{R}^3$. Donc (u, v, w) est une base de $\mathbf{R}^3$.

2)Le vecteur colonne de $f(u)$ dans la base canonique vaut :

$M(1,1,2)U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $f(u) = (1,0,0) = u$.

Le vecteur colonne de $f(w)$ dans la base canonique vaut :

$M(1,1,2)W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc $f(w) = (4,2,2) = 2w$.

3)Le vecteur colonne de $f(v)$ dans la base canonique vaut :

$M(1,1,2)V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $f(v) = (1,1,0) = u + v$.

On déduit des calculs précédents :

$$T = \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4)Raisonnement par récurrence.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $T^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix}$ », soit $T^0 = I_3$, c'est vrai.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{par HR} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

5)La matrice de passage de la base canonique $\mathscr{C}$ à la base $\mathscr{C}$ est : $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus, $QR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Donc $R^{-1} = Q$.

6)La formule de changement de base pour les endomorphismes donne :

$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f) \left(P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\right)^{-1}$, c'est-à-dire : $M(1,1,2) = RTQ$.

7)Une récurrence classique donne : $\forall n \in \mathbf{N},\ (M(1,1,2))^n = RT^nQ$.

Exercice 2 (ecricome 2009)

Partie I

1)Quand $x \to 0^+$, on a une forme indéterminée « $(-\infty) + (+\infty)$ ».
On transforme l'expression de $\varphi(x)$.
Pour tout $x > 0$, on a :
$\varphi(x) = \dfrac{1}{x}\left(2x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)+1\right) = \dfrac{1}{x}\left(2x(\ln x - \ln 2)+1\right) = \dfrac{1}{x}\big(2x\ln x - 2x\ln 2 + 1\big)$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to 0^+}(-2x\ln 2 + 1) = 1$.
Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+}\big(2x\ln x - 2x\ln 2 + 1\big) = 1$.
$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x) = +\infty$.
Cela signifie que $\mathscr{C}_\varphi$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
2)$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} 2\ln t = +\infty$. Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty$.
3)φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = 2\times\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x-1}{x^2}$.
4)$\varphi'(x)$ est du signe de $2x-1$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-4\ln 2 + 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) + 2 = -2\ln 4 + 2 = -2\times 2\ln 2 + 2 = -4\ln 2 + 2$.

5)$\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx -4\times 0,7 + 2 \approx -0,8$

φ est continue et strictement décroissante sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$. Elle réalise donc une bijection de $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ sur $f\left(\left]0,\dfrac{1}{2}\right[\right) =]-4\ln 2 + 2, +\infty[$.

$0 \in]-4\ln 2 + 2, +\infty[$ admet donc un unique antécédent $\alpha \in \left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ par φ.

De la même façon, 0 admet un unique antécédent $\beta \in \left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ par φ.

On a donc bien montré l'existence de deux réels α et β vérifiant $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$.
Et on a bien : $0 < \alpha < \beta$.

6)C'est un programme classique de dichotomie.

```
import numpy as np
def phi(x):
    y=2*np.log(x/2)+1/x
    return y
a=0
b=1/2
while b-a>10**-4:
    c=(a+b)/2
    if phi(c)>0:
        a=c
    if phi(c)<0:
        b=c
print(c)
```

Python affiche $\alpha \approx 0.23223876953125$

Partie II

1)$(x, y) \mapsto x + 4y$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
$t \mapsto e^t$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$.
Par composée, $(x, y) \mapsto e^{x+4y}$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
$(x, y) \mapsto xy$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et elle prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$.
$t \mapsto \ln t$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.
Par composée, $(x, y) \mapsto \ln(xy)$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
Par produit, f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

2)Pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, on a :
$\partial_1\left(e^{x+4y}\right) = 1 \times e^{x+4y} = e^{x+4y}$ et $\partial_1(\ln(xy)) = \dfrac{y}{xy} = \dfrac{1}{x}$.
Donc $\partial_1 f(x, y) = e^{x+4y}\ln(xy) + e^{x+4y} \times \dfrac{1}{x} = f(x, y) + \dfrac{1}{x} \times e^{x+4y}$.
$\partial_2\left(e^{x+4y}\right) = 4e^{x+4y}$ et $\partial_2(\ln(xy)) = \dfrac{x}{xy} = \dfrac{1}{y}$.
Donc $\partial_2 f(x, y) = 4e^{x+4y}\ln(xy) + e^{x+4y} \times \dfrac{1}{y} = 4f(x, y) + \dfrac{1}{y} \times e^{x+4y}$.

3)On vérifie que les dérivées premières s'annulent aux points donnés.
$\partial_1 f\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = f\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) + \dfrac{1}{\alpha} \times e^{2\alpha} = e^{2\alpha}\ln\left(\dfrac{\alpha^2}{8}\right) + \dfrac{1}{\alpha} \times e^{2\alpha} = e^{2\alpha}\left(\ln\left(\dfrac{\alpha^2}{8}\right) + \dfrac{1}{\alpha}\right)$.
Or, $\ln\left(\dfrac{\alpha^2}{8}\right) + \dfrac{1}{\alpha} = \ln\left(\alpha^2\right) - \ln 8 + \dfrac{1}{\alpha} = 2\ln(\alpha) - 2\ln 2 + \dfrac{1}{\alpha} = \varphi(\alpha) = 0$.
Donc $\partial_1 f\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = 0$.
$\partial_2 f\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = 4f\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) + \dfrac{4}{\alpha} \times e^{2\alpha} = 4e^{2\alpha}\ln\left(\dfrac{\alpha^2}{8}\right) + \dfrac{4}{\alpha} \times e^{2\alpha}$
$= 4e^{2\alpha}\left(\ln\left(\dfrac{\alpha^2}{8}\right) + \dfrac{1}{\alpha}\right) = 4e^{2\alpha} \times \varphi(\alpha) = 0$.

Donc $\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right)$ est un point critique de f.

Du fait que $\varphi(\beta) = 0$, on obtient de même : $\partial_1 f\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right) = \partial_2 f\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right) = 0$.

Donc $\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right)$ est un point critique de f.

4)• Pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,1} f(x,y) &= \partial_1\left(\partial_1 f(x,y)\right)\\ &= \partial_1\left(f(x,y) + \frac{1}{x} \times e^{x+4y}\right)\\ &= \partial_1 f(x,y) - \frac{1}{x^2} \times e^{x+4y} + \frac{1}{x} \times e^{x+4y}\end{aligned}$$

Donc $\partial^2_{1,1} f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = \underbrace{\partial_1 f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right)}_{=0} - \frac{1}{\alpha^2} \times e^{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} \times e^{2\alpha} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2} e^{2\alpha}$.

• Pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\partial^2_{2,2} f(x,y) &= \partial_2\left(\partial_2 f(x,y)\right)\\ &= \partial_2\left(4f(x,y) + \frac{1}{y} \times e^{x+4y}\right)\\ &= 4\partial_2 f(x,y) - \frac{1}{y^2} \times e^{x+4y} + \frac{4}{y} \times e^{x+4y}\end{aligned}$$

Donc $\partial^2_{2,2} f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = 4\underbrace{\partial_2 f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right)}_{=0} - \frac{16}{\alpha^2} \times e^{2\alpha} + \frac{16}{\alpha} \times e^{2\alpha} = 16\frac{\alpha - 1}{\alpha^2} e^{2\alpha}$.

• Pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,2} f(x,y) &= \partial_1\left(\partial_2 f(x,y)\right)\\ &= \partial_1\left(4f(x,y) + \frac{1}{y} \times e^{x+4y}\right)\\ &= 4\partial_1 f(x,y) + \frac{1}{y} \times e^{x+4y}\end{aligned}$$

Donc $\partial^2_{1,2} f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = 4\underbrace{\partial_1 f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right)}_{=0} + \frac{4}{\alpha} \times e^{2\alpha} = \frac{4}{\alpha} e^{2\alpha}$.

Comme f est de classe C^2, d'après le théorème de Schwarz, on a :
$\partial^2_{2,1} f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right) = \partial^2_{1,2} f\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right)$.

5)La matrice hessienne de f en $\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right)$ est :

$$H_1 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha - 1}{\alpha^2} e^{2\alpha} & \frac{4}{\alpha} e^{2\alpha} \\ \frac{4}{\alpha} e^{2\alpha} & 16\frac{\alpha - 1}{\alpha^2} e^{2\alpha} \end{pmatrix}.$$

λ est valeur propre de H_1

$\Longleftrightarrow H_1 - \lambda I$ n'est pas inversible

$$\iff \left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha}-\lambda\right)\left(16\frac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha}-\lambda\right)-\left(\frac{4}{\alpha}e^{2\alpha}\right)^2=0$$
$$\iff \lambda^2-17\frac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha}\lambda+\frac{16(\alpha-1)^2e^{4\alpha}}{\alpha^4}-\frac{16e^{4\alpha}}{\alpha^2}=0$$
$$\iff \lambda^2-17\frac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha}\lambda+\frac{16e^{4\alpha}}{\alpha^4}\big((\alpha-1)^2-\alpha^2\big)=0$$
$$\iff \lambda^2-17\frac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha}\lambda+\frac{16e^{4\alpha}}{\alpha^4}\big(1-2\alpha\big)=0.$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de H_1 vérifient :

$\lambda_1\lambda_2=\dfrac{16e^{4\alpha}}{\alpha^4}\big(1-2\alpha\big)>0$ car $\alpha<\dfrac{1}{2}$.

λ_1 et λ_2 sont donc non nulles et de même signe.

On a également : $\lambda_1+\lambda_2=17\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha}<0$.

Finalement $\lambda_1<0$ et $\lambda_2<0$.

Donc f possède un maximum local en $\left(\alpha,\dfrac{\alpha}{4}\right)$.

6)La matrice hessienne de f en $\left(\beta,\dfrac{\beta}{4}\right)$ est :

$$H_1=\begin{pmatrix}\dfrac{\beta-1}{\beta^2}e^{2\beta} & \dfrac{4}{\beta}e^{2\beta}\\ \\ \dfrac{4}{\beta}e^{2\beta} & 16\dfrac{\beta-1}{\beta^2}e^{2\beta}\end{pmatrix}.$$

Les calculs sont les mêmes que pour la question précédente, en faisant $\alpha\to\beta$.
Les valeurs propres μ_1 et μ_2 de H_2 vérifient :

$\mu_1\mu_2=\dfrac{16e^{4\beta}}{\beta^4}\big(1-2\beta\big)<0$ car $\beta>\dfrac{1}{2}$.

μ_1 et μ_2 sont non nulles et de signes contraires. Donc f ne possède pas d'extrémum local en $\left(\beta,\dfrac{\beta}{4}\right)$. C'est un point selle.

Remarque
On rappelle les relations coefficients racines pour un trinome ax^2+bx+c de discriminant positif :
le produit des racines vaut c/a et la somme des racines vaut $-b/a$.

Exercice 3 (ecricome 2009)

Préliminaire

1)Pour tout réel $x \in [0,1[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

2)$x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ est polynomiale donc dérivable sur $[0,1[$.

$x \mapsto \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ est dérivable sur $[0,1[$ comme quotient de fonctions dérivables.

Ces fonctions étant égales sur $[0,1[$, leurs dérivées coincident sur $[0,1[$, ce qui donne pour tout $x \in [0,1[$:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (-1) \times \left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' &= \left(1 + \sum_{k=1}^{n} x^k\right)' \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n} \left(x^k\right)' \quad \text{par linéarité de la dérivée} \\ &= \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

Partie I

1)$X \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2)$ et $E(X) = m = 5$.

Posons $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} = \dfrac{X-5}{\sigma}$, la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

On a alors :

$$\begin{aligned}P(X<7) = p &\Longleftrightarrow P(X-5 < 7-5) = p \\ &\Longleftrightarrow P\left(\frac{X-5}{\sigma} < \frac{7-5}{\sigma}\right) = p \\ &\Longleftrightarrow P\left(X^* < \frac{2}{\sigma}\right) = p \\ &\Longleftrightarrow \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = p \quad \text{car } X^* \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)\end{aligned}$$

Or, $p = 0,8413 = \Phi(1)$ d'après la table.

Par bijectivité de Φ, on a donc $\dfrac{2}{\sigma} = 1$, soit $\sigma = 2$.

2)La probabilité demandée est :

$$\begin{aligned}P(X > 9) &= P(X - 5 > 9 - 5)\\ &= P\left(\frac{X-9}{\sigma} > \frac{9-5}{\sigma}\right)\\ &= P\left(X^* > \frac{4}{\sigma}\right)\\ &= 1 - P\left(X^* \leq \frac{4}{\sigma}\right)\\ &= 1 - \Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right)\\ &= 1 - \Phi(2)\\ &= 1 - 0,9772\\ &= 0,0228.\end{aligned}$$

3)La probabilité demandée est :

$$P_{(X>3)}(X \leq 7) = \frac{P\big((X > 3) \cap (X \leq 7)\big)}{P(X > 3)} = \frac{P\big(3 < X \leq 7\big)}{P(X > 3)}.$$

Or,
$$\begin{aligned}P\big(3 < X \leq 7\big) &= P\big(3 - 5 < X - 5 \leq 7 - 5\big)\\ &= P\left(\frac{3-5}{\sigma} < \frac{X-5}{\sigma} \leq \frac{7-5}{\sigma}\right)\\ &= P\left(-1 < X^* \leq 1\right) \quad \text{car } \sigma = 2\\ &= \Phi(1) - \Phi(-1)\\ &= \Phi(1) - \big(1 - \Phi(1)\big)\\ &= 2\Phi(1) - 1.\end{aligned}$$

Et
$$\begin{aligned}P(X > 3) &= P(X - 5 > 3 - 5)\\ &= P\left(\frac{X-5}{\sigma} > \frac{3-5}{\sigma}\right)\\ &= P\left(X^* > -1\right)\\ &= 1 - P\left(X^* \leq -1\right)\\ &= 1 - \Phi(-1)\\ &= 1 - \big(1 - \Phi(1)\big)\\ &= \Phi(1).\end{aligned}$$

Donc $P_{(X>3)}(X \leq 7) = \dfrac{2\Phi(1) - 1}{\Phi(1)}$.

4)a)L'expérience aléatoire est constituée de 10 épreuves successives, identiques et indépendantes.

Pour chaque épreuve, la probabilité de succès (=attendre moins de 7 minutes) vaut p et Y compte le nombre de succès.

Donc $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(10, p)$.

Le cours donne : $E(Y) = 10p$ et $V(Y) = 10p(1-p)$.

b)• Pour tout $i \in [\![1, 10]\!]$, notons $A_i =$ ≪ Thiriex attend plus de 7 minutes le jour i ≫.

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= P\left(\overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_{10}}\right) \\ &= P\left(\overline{A_1}\right) \times \cdots \times P\left(\overline{A_{10}}\right) \quad \text{par indépendance} \\ &= p \times \cdots \times p \\ &= p^{10}. \end{aligned}$$

Pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= P\left(\overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k\right) \\ &= P\left(\overline{A_1}\right) \times \cdots \times P\left(\overline{A_{k-1}}\right) P(A_k) \quad \text{par indépendance} \\ &= p \times \cdots \times p \times (1-p) \\ &= p^{k-1}(1-p). \end{aligned}$$

• $Z(\Omega) = [\![0, 10]\!]$. Donc Z est discrète finie. Elle admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=0}^{10} kP(Z=k) \\ &= 0P(Z=0) + \sum_{k=1}^{10} kp^{k-1}(1-p) \\ &= (1-p)\sum_{k=1}^{10} kp^{k-1} \\ &= (1-p) \times \frac{10p^{11} - 11p^{10} + 1}{(1-p)^2} \quad \text{préliminaire avec } x \to p \text{ et } n = 10 \\ &= \frac{10p^{11} - 11p^{10} + 1}{1-p}. \end{aligned}$$

5)La formule des probabilités totales pour le système complet $\left(A_n, \overline{A_n}\right)$ donne :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) \\ &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})\, P\left(\overline{A_n}\right) \\ &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})\left(1 - P(A_n)\right) \quad (*) \end{aligned}$$

Il reste à calculer les probabilités conditionnelles.

Supposons A_n réalisé.

Thurman prend donc le bus le jour n. Alors, A_{n+1} est réalisé si et seulement si Thurman reprend le bus le jour $n+1$, ce qui se produit si et seulement si il attend moins de 7 minutes le jour n, ce qui se produit avec la probabilité p.

Donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = p$.

Supposons $\overline{A_n}$ réalisé.

Thurman prend donc le métro le jour n. Alors, A_{n+1} est réalisé si et seulement si Thurman change de transport et prend le bus le jour $n+1$, ce qui se produit avec la probabilité $1/2$.

Donc $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$.

En remplaçant dans $(*)$, on obtient :

$P(A_{n+1}) = pP(A_n) + \frac{1}{2}\big(1 - P(A_n)\big) = \left(p - \frac{1}{2}\right) P(A_n) + \frac{1}{2}.$

On a donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$p_{n+1} = \left(p - \frac{1}{2}\right) p_n + \frac{1}{2}.$$

b)$\bullet$ $\alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right) \alpha + \frac{1}{2} \iff \alpha = p\alpha - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} \iff \left(\frac{3}{2} - p\right) \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (3-2p)\alpha = 1$

Donc $\alpha = \dfrac{1}{3-2p}$.

$\bullet$ La suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est arithmético-géométrique.

En soustrayant membre à membre les égalités $p_{n+1} = \left(p - \frac{1}{2}\right) p_n + \frac{1}{2}$ et $\alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right) \alpha + \frac{1}{2}$, on obtient :

$$p_{n+1} - \alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right) \big(p_n - \alpha\big).$$

La suite $\big(p_n - \alpha\big)_{n\geq 1}$ est donc géométrique de raison $p - \frac{1}{2}$.

On déduit : $\forall n \geq 1,\ p_n - \alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} (p_1 - \alpha)$.

$p_1 = 1$ par énoncé, puisque le jour 1, Thurman prend le bus.

On déduit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$p_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} (1 - \alpha) + \alpha.$$

c)$p - \frac{1}{2} = 0,8413 - 0,5 = 0,3413 \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \alpha$.

Partie II

1)a)$\forall k \in \mathbf{N},\ P(Y_t = k) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$

$E(X_t) = \lambda t$ et $V(X_t) = \lambda t$.

b)Soit $t > 0$. L'événement $(Y_t = 0)$ est réalisé si et seulement si aucun appel n'est reçu par le standard enttre les instants 0 et t, ce qui se produit si et seulement si le premier appel est effectué après l'instant t.

Donc $(Y_t = 0) = (T > t)$.

On déduit : $\forall t > 0,\ P(T > t) = P(Y_t = 0) = e^{-\lambda t}$.

Puis, $\forall t > 0,\ P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

c)La fonction de répartition F_T de T est définie par $\forall t \in \mathbf{R}$ $F_T(t) = P(T \leq t)$.

Si $t < 0$, l'énoncé donne $F_T(t) = 0$.
Et d'après la question 1)b), on a : $\forall t \geq 0,\ F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
On reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ.
Donc $T \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.
Le cours donne : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(T) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

2)a)• $\forall t < 0,\ g(t) = 0$ et $\forall t > 0,\ g(t) = te^{-t} \geq 0$. Donc $\forall t \in \mathbf{R},\ g(t) \geq 0$.
• g est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle), continue sur $[0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues. g est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 0.
• $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)dt$ converge et vaut 0 car g est nulle sur $]-\infty, 0[$.
$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)dt = \int_{0}^{+\infty} te^{-t}dt$ converge car elle peut être interprétée comme l'espérance d'une variable aléatoire X, où $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.
On a alors : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)dt = E(X) = \frac{1}{1} = 1$.
Par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge.
De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \int_{-\infty}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{+\infty} g(t)dt = 0 + 1 = 1.$
On conclut que g est une densité de probabilité.

> Remarque
> On pouvait aussi calculer $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)dt$ à l'aide d'une IPP.

b)U admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |tg(t)|dt$ converge.
$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |tg(t)|dt$ converge et vaut 0 car g est nulle sur $]-\infty, 0[$.
$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |tg(t)|dt = \int_{0}^{+\infty} t^2e^{-t}dt,$ intégrale convergente, puisqu'elle représente $E(X^2)$.
Par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |tg(t)|dt$ converge. Donc U admet une espérance.

$$\begin{aligned}
E(U) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} tg(t) + \int_{0}^{+\infty} tg(t) \\
&= 0 + E(X^2) \\
&= V(X) + E(X)^2 \quad \text{par Koenig} \\
&= \frac{1}{1^2} + 1^2 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

$E(U)$ représente la durée moyenne de transport.