DM4 cubes
à rendre le lundi / /

Exercice 1

Dans tout l'exercice, $n \geq 2$ désigne un entier et A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note V_i la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ème ligne qui vaut 1.
On considère enfin l'application ϕ_A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \phi_A(M) = AM - MA.$$

Partie I :

1)Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

2)Calculer $\phi_A(I_n)$. L'endomorphisme ϕ_A est-il injectif ? surjectif ?

Partie II :

On suppose dans cette partie que A est **diagonalisable**.

3)Montrer que ${}^tA$ est diagonalisable et que A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.

4)Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ un vecteur propre de A et soit $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ un vecteur propre de ${}^tA$. Montrer que $X{}^tY$ est un vecteur propre de ϕ_A.

5)Soient $(X_1, ..., X_n)$ et $(Y_1, ..., Y_n)$ deux bases de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
On note $\mathscr{F}$ la famille $\mathscr{F} = (X_i{}^tY_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

a)Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $V_i{}^tV_j \in Vect(\mathscr{F})$.

b)En déduire que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

6)En utilisant la question 4) et en utilisant la question 5) en faisant un choix astucieux de $(X_1, ..., X_n)$ et $(Y_1, ..., Y_n)$, montrer que ϕ_A est diagonalisable.

Exercice 2 :

Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$.

1)Montrer que $I(x)$ est une intégrale convergente.

2)Calculer $I(0)$.

3)Montrer que I est décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

4)a)A l'aide d'une loi normale, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b)En posant $u = \sqrt{tx}$, en déduire que $I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{x}}$, puis préciser $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I(x)$.