DM5 cubes
à rendre le lundi / /

Exercice 1 :

Dans cet exercice, r est un entier naturel et x un réel fixé de $]0,1[$.

1)Montrer que $\binom{n}{r} \sim \frac{n^r}{r!}$ quand $n \to +\infty$.

2)Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n$. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq r} \binom{n}{r} x^n$ converge.

3)Pour tout entier naturel r, on pose : $S_r = \sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$.

a)Donner la valeur de S_0.

b)Grâce à la formule du triangle de Pascal, établir que $S_r + S_{r+1} = \frac{1}{x} S_{r+1}$.

c)Montrer que $\forall r \in \mathbf{N} : S_r = \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$ (formule du binôme négatif).

Exercice 2 :

Partie I

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non-nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

1)Calculer $A^2 - (a+d)A$ en fonction de I, matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

2)On suppose dans cette question qu'il existe un entier $k \geq 2$ telle que $A^k = O$ et $A^{k-1} \neq O$ (on dit alors que A est nilpotente d'ordre k).

Etablir que $ad - bc = 0$, puis que $a + d = 0$.

3)Conclure que A est nilpotente si et seulement si $A^2 = O$.

Partie II :

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
f est dit nilpotent d'ordre k si $f^k = 0$ et $f^{k-1} \neq 0$ (en convenant que $f^0 = Id_E$).

1)Montrer que $f^2 = 0 \Longleftrightarrow Imf \subset Kerf$.

Dans toute la suite, on suppose que f est **non nul** et que **dimE = 2**.

2)Montrer que $f^2 = 0 \Longleftrightarrow Imf = Kerf$.

3)A l'aide de la partie I, en déduire que f est nilpotent $\Longleftrightarrow f^2 = 0$.

4)Montrer que si f est nilpotent, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indication : pour construire cette base, prendre l'un des vecteurs dans $Kerf$ et l'autre dans $E \setminus Kerf$.