# TD11 - équations et systèmes différentiels

Exercice 1 ★ ☆ ☆☆
Résoudre l'équation différentielle sur l'intervalle $I$ donné.

1)$y' = t^3 \qquad I = \mathbf{R}$

2)$ty' = 1 \qquad I = ]0, +\infty[$

3)$y'' = 2 \qquad I = \mathbf{R}$

4)$t^2 y'' = 1 \qquad I = ]-\infty, 0[$.

Exercice 2 ★ ☆ ☆☆
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1)$y' + 2y = 0 \qquad$ 2)$y' = 3y \qquad$ 3)$2y' + 5y = 0$.

Exercice 3 ★ ☆ ☆☆
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1)$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad$ 2)$y'' = -y' + 2y \quad$ 3)$y'' - 2y' + y = 0$.

Exercice 4 ★ ☆ ☆☆
On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = e^{-t}.$$

1)Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.

2)Montrer que la fonction $t \mapsto te^{-t}$ est solution de $(E)$.

3)En déduire les solutions de $(E)$.

Exercice 5 ★ ☆ ☆☆
On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' - y = -t^2.$$

1)Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' - y = 0$.

2)Chercher une fonction polynomiale du second degré solution de $(E)$.

3)En déduire les solutions de $(E)$.

4)Déterminer la solution $h$ de $(E)$ vérifiant $h(0) = 1$.

Exercice 6 ★ ★ ☆☆
On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 2y' + y = 4te^t.$$

1)Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y'' + 2y' + y = 0$.

2)Chercher une solution particulière de $(E)$ de la forme $t \mapsto (at + b)e^t$.

3)En déduire les solutions de $(E)$.

4)Déterminer la solution $h$ de $(E)$ vérifiant $h(0) = 2$ et $h'(0) = 0$.

Exercice 7 ★ ★ ☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1)a)Déterminer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres de $A$.

b)Justifier que $A$ est diagonalisable.

2)On considère le système différentiel :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{cccc} x' & = & -2x & + & 4y \\ y' & = & x & - & 2y \end{array} \right.$$

a)Ecrire $(S)$ sous forme matricielle.

b)A l'aide de la question 1), résoudre $(S)$.

3)a)Déterminer les points d'équilibre de $(S)$.

b)En utilisant la question 2)b), vérifier que toutes les trajectoires de $(S)$ convergent vers un point d'équilibre. Pouvait-on le prévoir ?

4)Soit $H : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ H(x,y) = x + 2y$.

Vérifier que si $(x,y)$ est un couple solution de $(S)$, alors la fonction $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est constante.

Que peut-on dire alors des trajectoires de $(S)$ ?

Exercice 8 ★ ★ ☆☆

On considère le système différentiel :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & x \\ y' & = & 2y \end{array} \right.$$

1)Quels sont les points d'équilibre de $(S)$ ?

2)Résoudre $(S)$.

3)Donner l'allure des trajectoires de $(S)$.

Exercice 9 ★ ★ ★☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1)Montrer par l'absurde que $A$ n'est pas diagonalisable.

2)Résoudre « à la main » le système différentiel :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccc} x' & = & x & + & y \\ y' & = & y & & \end{array} \right.$$

*Indication : on résoudra la deuxième équation différentielle, puis on reportera les solutions y trouvées dans la première équation différentielle.*
*Il restera alors à résoudre la première équation différentielle.*

Exercice 10 ★ ★ ☆☆

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1)Montrer que $(V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de $A$. Que conclure pour $A$ ?

2)On considère le système différentiel :

$$(S) : \begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

a)Ecrire $(S)$ sous forme matricielle.

b)A l'aide de la question 1), résoudre $(S)$.

Exercice 11 ★ ★ ☆☆

Dans tout l'exercice, on donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1)a)Justifier que $A$ est diagonalisable.

b)Vérifier que $A^3 = 6A^2$.

c)En déduire les valeurs propres de $A$ et une base des sous-espaces propres associés.

2)On considère le système différentiel :

$$(S) : \begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases}$$

a)Ecrire $(S)$ sous forme matricielle.

b)A l'aide de la question 1), résoudre $(S)$.

# Indications / Réponses

Exercice 1

1)$y : t \mapsto \frac{t^4}{4} + C$ où $C \in \mathbf{R}$ 2)$y : t \mapsto \ln t + C$ où $C \in \mathbf{R}$

3)$y : t \mapsto t^2 + at + b$ où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ 4)$t \mapsto -\ln|t| + at + b$ où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

Exercice 2

On utilise le THM1.

1)$y : t \mapsto \beta e^{-2t}$ où $\beta \in \mathbf{R}$ 2)$y : t \mapsto \beta e^{3t}$ où $\beta \in \mathbf{R}$ 3)$y : t \mapsto \beta e^{-\frac{5}{2}t}$ où $\beta \in \mathbf{R}$.

Exercice 3

On utilise le THM3.

1)$y : t \mapsto \beta_1 e^{2t} + \beta_2 e^{3t}$ où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$

2)$y : t \mapsto \beta_1 e^{t} + \beta_2 e^{-2t}$ où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$

3)$y : t \mapsto (\beta_1 t + \beta_2) e^{t}$ où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$.

Exercice 4

1)$y : t \mapsto \beta e^{-t}$ où $\beta \in \mathbf{R}$.

2)On note $g : t \mapsto te^{-t}$ et on vérifie que $\forall t \in \mathbf{R},\ g'(t) + g(t) = e^{-t}$.

3)D'après le THM2, les solutions de $(E)$ sont $t \mapsto \beta e^{-t} + te^{-t}$ où $\beta \in \mathbf{R}$.

Exercice 5

1)$y : t \mapsto \beta e^{t}$ où $\beta \in \mathbf{R}$.

2)$t \mapsto t^2 + 2t + 2$.

3)Les solutions de $(E)$ sont $t \mapsto \beta e^{t} + t^2 + 2t + 2$ où $\beta \in \mathbf{R}$.

4)$h : t \mapsto -e^{t} + t^2 + 2t + 2$.

Exercice 6

1)$y : t \mapsto (\beta_1 t + \beta_2) e^{-t}$ où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$.

2)$y_p : t \mapsto (t-1)e^{t}$.

3)Les solutions de $(E)$ sont $t \mapsto (\beta_1 t + \beta_2) e^{-t} + (t-1)e^{t}$ où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$.

4)$h : t \mapsto (3t+3)e^{-t} + (t-1)e^{t}$.

Exercice 7

1)a)$sp(A) = \{0, -4\}$.

$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sont des bases de $E_0(A)$ et $E_{-4}(A)$.

2)a)$(S)$ s'écrit $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

2)b)En utilisant le THM5, on trouve que les solutions de $(S)$ sont les fonctions : $t \mapsto \left(2\beta_1 - 2\beta_2 e^{-4t}, \beta_1 + \beta_2 e^{-4t}\right)$ où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$.

3)a)En utilisant P5 ou la définition, on trouve que les points d'équilibre de $(S)$ sont les couples de la forme $(2a, a)$ où $a \in \mathbf{R}$. Il y en a une infinité !

3)b)$\lim_{t \to +\infty} e^{-4t} = 0$ donc $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 2\beta_1$ et $\lim_{t \to +\infty} y(t) = \beta_1$.

Les trajectoires convergent vers le point d'équilibre $(2\beta_1, \beta_1)$.

Résultat prévisible (utiliser le THM7).

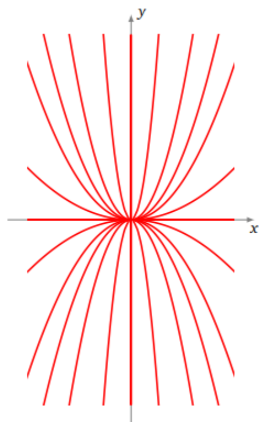
3)c)La trajectoire est $\left\{\left(2 - 2e^{-4t}, 1 + e^{-4t}\right), t \in \mathbf{R}\right\}$.

Exercice 8

1)$(0,0)$ est le seul point d'équilibre de $(S)$.

2)Le système étant diagonal, on peut résoudre chacune des équations différentielles. Les solutions de $(S)$ sont alors les fonctions $t \mapsto \left(\beta e^t, \gamma e^{2t}\right)$.

3)Les trajectoires sont les deux demi-axes horizontaux, les deux demi-axes verticaux et des courbes qui sont des branches de parabole.




Exercice 9

1)Classique : si $A$ était diagonalisable, elle serait semblable à $I$ donc égale à $I$.

2)Le cours ne s'applique pas du fait que $A$ n'est pas diagonalisable !

Les solutions sont $t \mapsto \left((a+bt)e^t, be^t\right)$ où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

Exercice 10

1)$AV_1 = 0$, $AV_2 = V_2$ et $AV_3 = 2V_3$. On conclut que $A$ est diagonalisable.

2)a)$(S)$ s'écrit $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

2)b)Les solutions de $(S)$ sont : $t \mapsto \left(\beta_1 + \beta_3 e^{2t}, \beta_1 + \beta_2 e^t + \beta_3 e^{2t}, -\beta_1 - \beta_2 e^t + \beta_3 e^{2t}\right)$ où $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbf{R}^3$.

Exercice 11

1)a)$A$ est symétrique donc diagonalisable.

c)$X^3 - 6X^2$ est un polynôme annulateur de $A$. Ses racines sont 0 et 6.

Donc $sp(A) \subset \{0,6\}$. On vérifie ensuite que 0 et 6 sont des VP de $A$.

base de $E_0(A) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ et base de $E_6(A) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

2)a)$(S)$ s'écrit $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

2)b)Les solutions de $(S)$ sont : $t \mapsto \left(\beta_1 + \beta_3 e^{6t}, \beta_2 + 2\beta_3 e^{6t}, \beta_1 + 2\beta_2 - \beta_3 e^{6t}\right)$ où $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbf{R}^3$.