Chapitre 4 : réduction des matrices carrées

Le but du chapitre est d'écrire quand c'est possible une matrice carrée A donnée sous la forme :

$$A = PDP^{-1}$$

où D est diagonale et P inversible.

Une récurrence immédiate donne alors : $A^n = PD^nP^{-1}$.

I)Eléments propres d'une matrice carrée

Déf : on dit qu'un vecteur colonne U de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est un *vecteur propre* de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ si U est non-nul et si AU est colinéaire à U.
Le coefficient de proportionnalité λ tel que $AU = \lambda U$ est appelé *valeur propre* de A et on dit alors que U est vecteur propre de A associé à λ.

Déf : l'ensemble des valeurs propres de A s'appelle *spectre* de A, noté $sp(A)$.

Notation importante :

$E_\lambda(A) = \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}), AU = \lambda U\} = \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}), (A - \lambda I)U = O\}$.

Propriété 1

$E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Théorème 1

λ est valeur propre de $A \Leftrightarrow A - \lambda I$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow E_\lambda(A) \neq \{O\}$.

✓ 0 est valeur propre de $A \Leftrightarrow A$ n'est pas inversible.

Déf : quand λ une valeur propre de A, alors $E_\lambda(A)$ est appelé *sous-espace propre* de A associé à λ. Il est constitué de tous les vecteurs propres de A associés à λ et du vecteur nul.

<u>Exercice 1</u>

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1)Montrer que -2 est une valeur propre de A.

2)Vérifier que U_1, U_2 et U_3 sont des vecteurs propres de A.

<u>Exercice 2</u>

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1)Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1.

2)$U = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il vecteur propre de A ?

<u>Exercice 3</u>
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, conclure que A n'a pas de valeur propre.

Propriété 2
Les valeurs propres d'une matrice diagonale ou triangulaire sont ses éléments diagonaux.

Propriété 3
Si deux matrices sont semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres.

Propriété 4
Toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ possède au plus n valeurs propres.
De plus, la somme des dimensions de tous les sous-espaces propres de A est inférieure ou égale à n.

<u>Exercice 4</u>
Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Exercice 5</u>
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A et B ont-elles les mêmes valeurs propres ?

<u>Exercice 6</u>
Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Réponse : $sp(A) = \{-3, 3\}$.

II)Polynôme de matrice

Déf : soient $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme et A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

On définit la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, notée $P(A)$ par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k.$$

en convenant que $A^0 = I_n$.
Déf : on dit que P est un *polynôme annulateur* de A si $P(A) = O$.

Théorème 2
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et soit P un polynôme annulateur de A.
Alors, $sp(A) \subset \{racines\ de\ P\}$.

<u>Exercice 7</u>
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
1)Vérifier que $P(X) = X^2 - 6X + 8$ est un polynôme annulateur de A.
2)En déduire les valeurs propres de A.

III)Matrice diagonalisable

Déf : on dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est *diagonalisable* s'il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont tous les vecteurs sont des vecteurs propres de A.

Théorème 3 (théorème de réduction - important en pratique)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de A vaut n..

Corollaire
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable et tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

<u>Exercice 8</u>
Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1)Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de A.

2)A est-elle diagonalisable ?

Réponses :
$E_{-2}(A) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_1(A) = Vect \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 5
Toute matrice symétrique est diagonalisable.

IV)Concaténation, forme réduite

Propriété 6
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
Toute concaténation de p vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes λ_1, ...,λ_p forme une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

<u>Exercice 9</u>
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient $U = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1)Montrer que U, V et W sont des vecteurs propres de A.

2)Expliquer sans calcul pourquoi la famille (U, V, W) est libre.

Propriété 7
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
Toute concatenation de p familles libres de sous-espaces propres associes à des valeurs propres distinctes λ_1, ...,λ_p forme une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Théorème 4 (forme réduite)
$A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ il existe $D \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ diagonale et $P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

En pratique, on obtient P et D de la façon suivante :

– les colonnes de P sont constituées des bases des sous-espaces propres de A,
– la diagonale de D est formée des valeurs propres de A, rangées dans le **même ordre** que les colonnes de P.

<u>Exercice 10</u>
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1)Vérifier que 0 et 4 sont des valeurs propres de A, puis déterminer une base des sous-espaces propres associés.

2)Justifier que A est diagonalisable.

3)A est-elle inversible ?

4)Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Le couple (D, P) est -il unique ?

Réponses :

1)$E_0(A) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $E_4(A) = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

<u>Exercice 11</u>
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que A n'est pas diagonalisable.

V)Complément : une formule bien utile

Propriété 8
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
On a : $dim E_\lambda(A) + rg(A - \lambda I) = n$.

<u>Exercice 12</u>
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1)Déterminer le rang de $A - 2I$.

2)En déduire une valeur propre de A et la dimension de son sous-espace propre associé.