105 points 70% = $\frac{20}{20}$

EDHEC

Exercice 1 24 points

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. (a) Déterminer $(A - I)^2$. 1
   (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A. 1,5
2. On pose $A = N + I$.
   (a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A. 2
   (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$. 0,5
3. (a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A. 1,5
   (b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable. 1,5
4. On pose $u_1 = (f - Id)(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
   (a) Montrer que le rang de $f - Id$ est égal à 1. 1,5
   (b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $Ker(f - Id)$. 3
5. (a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$. 1,5
   (b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base. 1,5
6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire une relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}. 0,5+1
7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i, j) de $[\![1, 3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.
   (a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5. 3
   (b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence : 1,5
   $$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$
   (c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille :
   $(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$. 2,5

Exercice 2

26 points

On dispose de trois pièces :

– une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$

– une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr,

– une pièce numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».

Pour tout $k \in \mathbb{N}*$, on note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.

On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X = 1)$. 1,5

   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, P(X = n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. 2

   (c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$ 2

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer . 2,5

3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. Déduire que X possède une variance et que $V(X) = \frac{4}{3}$. 2+1,5

4. Justifier que Y suit la même loi que X. 0,5

5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X = 1] \cap [Y = j]) = P([Y = j])$. 1,5

   (b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X = i] \cap [Y = 1]) = P([X = i])$. 1

6. Loi de $X + Y$.

   (a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2. 2

   (b) Montrer que $P(X + Y = 1) = \frac{2}{3}$. 2

   (c) Justifier que , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

   $$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$ 2

   (d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

   $$P(X + Y = n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$ 2

7. Informatique. On suppose importé le module **numpy.random** d'alias **rd**.
   On rappelle que la commande **rd.randint(a,b)** renvoie de façon équiprobable un entier aléatoire compris entre a et $b - 1$.
   On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0 .

   (a) Compléter le script **Python** suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece=rd.randint(...,...)
x=1
if piece==0:
    lancer=rd.randint(...,...)
    while lancer==0:
        lancer=......
        x=.....
if piece==1:
    x=.....
print(x)
```

   2,5

   (b) Justifier que le cas de la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent. 1

EXERCICE 3 16 points

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Partie 1 9

1) Justifier que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. 0,5

2) **a)** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f. 1

b) Déterminer les points critiques de f. 2

3) **a)** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f. 1,5

b) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur. 3

4) Cet extremum est-il global ? 1

Partie 2 7

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x, 1).$$

5) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x, possède une unique solution que l'on notera u_n. 3

6) On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.

a) Dresser le tableau de variations de h^{-1}. 1

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. 1

c) En revenant à la définition de u_n, en déduire le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^\alpha$. 2

Problème 41 points

Partie I 11

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0,1[$.

1. (a) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$. 3

   (b) En déduire que : $\lim_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$. 0,5

2. (a) Pour tout réel t de $[0,1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$. 1

   (b) En déduire que : $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$. 3

   (c) Utiliser la question 1 pour montrer que la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer. 2

   (d) Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$. 1,5

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt$.

Partie II 30

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ». On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

1. Reconnaître la loi de N. 1,5
2. Informatique.
   On suppose importés le module `numpy` d'alias `np` et le module `numpy.random` d'alias `rd`. On rappelle les points suivants :
   – la fonction `np.floor` prend en paramètre un réel x et renvoie sa partie entière,
   – la fonction `rd.geometric` prend en paramètre un réel p de [0,1] et renvoie une valeur aléatoire d'une variable aléatoire suivant la loi $G(p)$,
   – la fonction `rd.randint` prend en paramètres deux entiers a et b avec $a < b$ et renvoie de façon équiprobable un entier aléatoire entre a et $b - 1$.

(a) Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*np.floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair. 2

(b) Compléter le programme Python suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire énoncée au début de la partie II.

```
p=float(input("entrer p"))
N=.........
X=.........
if ......... :
    print("le joueur a perdu")
else:
    print("le joueur a gagné")
```

3

3. (a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$. 1

(b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$. 1

(c) Déterminer $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[\![0, j-1]\!]$. 1

(d) Déterminer $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[\![0, j]\!]$. 1

4. (a) Justifier que $P(X = 2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n)P_{(N=n)}(X = 2k+1)$.

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)$$

4

(b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt$. 2

5. (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt = 0$. 3

(b) Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

3

(c) En déduire que : $P(A) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt$. 2

6. (a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

2

(b) Écrire $P(A)$ explicitement en fonction de q. 2,5

(c) En déduire que $P(A) > \frac{1}{2}$. 1