Réécrit en Python par Nicolas Damien

# Maths Ecricome 2019 voie E

## Exercice 1 (Original modifié !)

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^3$, dont on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### Partie A

**1)** **a:** Calculer $A^2$ puis vérifier que $A^3$ est la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

**b:** En déduire que 0 est la seule valeur propre de $A$.

**c:** $A$ est-elle diagonalisable ?

**2)** Soient $e'_1 = (-1,-1,1)$, $e'_2 = (2,-1,1)$ et $e'_3 = (-1,2,1)$.

**a:** Montrer que $(e'_1)$ est une base de Ker f.

**b:** Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $E$.

**c:** Démontrer que la matrice représentative de $f$ dans la base $\mathscr{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**3)** On pose : $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $h$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice $M$.

**a:** Déterminer deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $M = \alpha A + \beta I$, où $I$ est la matrice identité d'ordre 3.

**b:** Déterminer la matrice $M'$ de $h$ dans la base $\mathscr{B}'$.

**c:** En déduire que $M$ est inversible.

**d:** À l'aide de la question 1) a, calculer $(M-I)^3$. En déduire l'expression de $M^{-1}$ en fonction des matrices $I$, $M$ et $M^2$.

**e:** À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer $M^n$ pour tout entier naturel $n$, en fonction des matrices $I$, $A$ et $A^2$.
Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$ ?

### Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme $g$ de $E$ vérifiant $g \circ g = f$.
On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice $V$ carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T$$

On note $g$ l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}'$ est $V$.

**1)** Montrer que $V\ T = T\ V$. En déduire que $g \circ f = f \circ g$.

**2)** **a:** Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de $f$.
En déduire qu'il existe un réel $a$ tel que $g(e'_1) = a\, e'_1$.

**b:** Montrer que $g(e'_2) - a\,e'_2$ appartient aussi au noyau de $f$.
En déduire qu'il existe un réel $b$ tel que $g(e'_2) = b\,e'_1 + a\,e'_2$.

**c:** Montrer que : $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = a\,e'_2 + b\,e'_1$.
En déduire que $g(e'_3) - a\,e'_3 - b\,e'_2$ appartient au noyau de $f$.

**d:** En déduire qu'il existe un réel $c$ tel que : $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

**3)** Calculer $V^2$ en fonction de $a$, $b$ et $c$, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

## Exercice 2

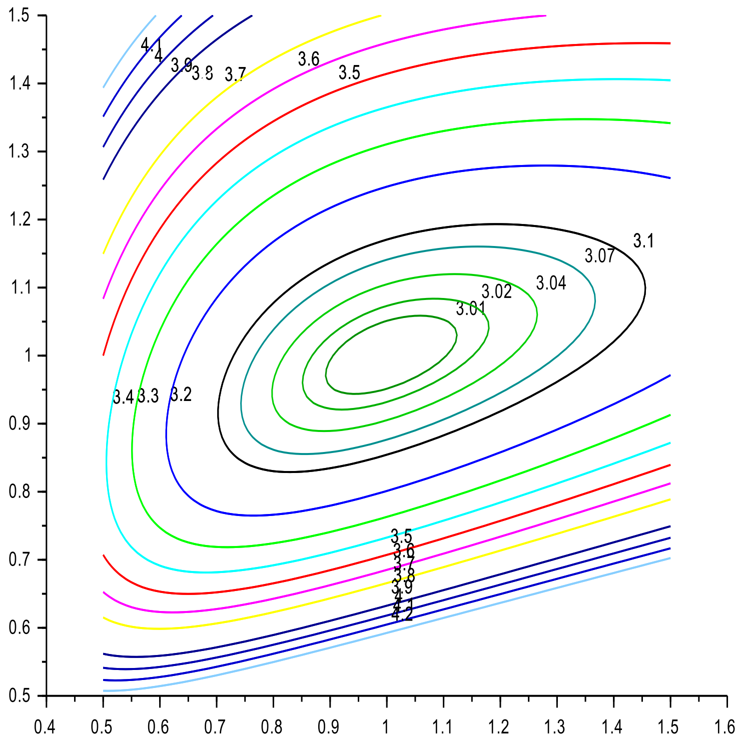
On considère la fonction $f$ définie sur l'ouvert de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \qquad f(x,y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$$

La première partie consiste en l'étude des extrema éventuels de la fonction $f$, et la deuxième partie a pour objectif l'étude d'une suite implicite définie à l'aide de la fonction $f$.
Ces deux parties sont indépendantes.

**Partie A**

**1)** On utilise `Python` pour tracer les lignes de niveau de la fonction $f$. On obtient le graphe suivant :




Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour $f$, dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.

**2)** **a:** Démontrer que $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

**b:** Calculer les dérivées partielles premières de $f$, puis démontrer que $f$ admet un unique point critique, noté $A$, que l'on déterminera.

**c:** Calculer les dérivées partielles secondes de $f$, puis démontrer que la matrice hessienne de $f$ au point $A$ est la matrice $H$ définie par : $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

**d:** En déduire que la fonction $f$ admet au point $A$ un extremum local, préciser si cet extremum est un minimum ou un maximum, et donner sa valeur.

**Partie B**

Pour tout entier $n$ non nul, on note $h_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \qquad h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}.$$

**1)** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, la fonction $h_n$ est strictement décroissante sur $]0,1][$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

**2)** En déduire que pour tout entier $n$ non nul, l'équation : $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées $u_n$ et $v_n$ et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

**3)** **a:** Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

**b:** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad h_{n+1}(v_n) \geqslant 4$.

**c:** Montrer alors que la suite $(v_n)$ est décroissante.

**4)** **a:** Démontrer que la suite $(v_n)$ converge vers un réel $\ell$ et montrer que $\ell \geqslant 1$.

**b:** En supposant que $\ell > 1$, démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty$.
En déduire une contradiction.

**c:** Déterminer la limite de $(v_n)$.

**5)** **a:** Montrer que : $\forall n \geqslant 1, \quad v_n \leqslant 3$

**b:** Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel $n$ non nul et un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ en entrée.

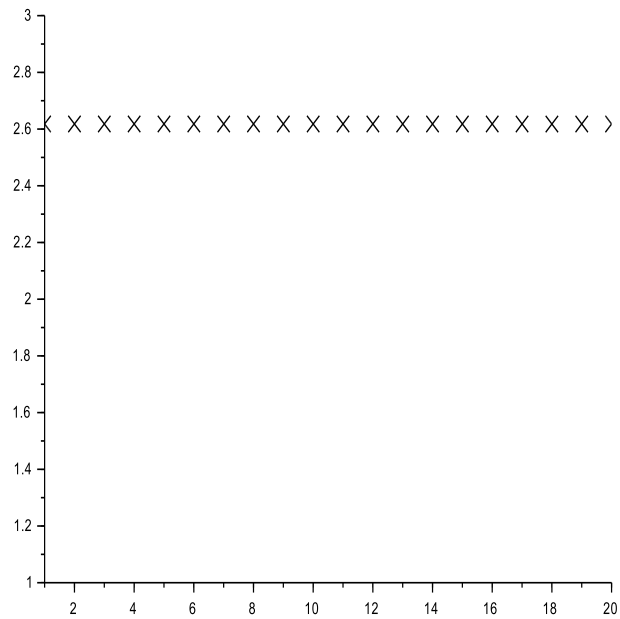
**c:** Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à $10^{-5}$ près de $v_n$ par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geqslant 1$ en entrée :

```
def v(n):
    a=1
    b=3
    while b-a>10**-5:
        c=(a+b)/2
        if h(n,c)<4:
            .......
        else:
            .......
    return .....
```

**d:** À la suite de la fonction v, on écrit le code suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
X=[k for k in range (1,21)]
Y=[v(k)**k for k in range (1,21)]
plt.scatter(X,Y)
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :




Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
Que peut-on conjecturer ?

**e:** Montrer que : $\forall n \geqslant 1, \qquad (v_n)^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

**f:** Retrouver ainsi le résultat de la question 4) c.

## Exercice 3

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

### Partie A

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \leqslant -1 \end{cases}$$

**1)** Démontrer que la fonction $f$ est paire.

**2)** Justifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et calculer sa valeur.

**3)** **a:** À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel $A$ strictement supérieur à 1, on a : $\int_{-A}^{-1} f(t)\, dt = \int_1^A f(u)\, du$.

En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\, dt$ converge et donner sa valeur.

**b:** Montrer que la fonction $f$ est une densité de probabilité.

**4)** On considère une variable aléatoire $X$ admettant $f$ pour densité.
On note $F_X$ la fonction de répartition de $X$.

**a:** Montrer que, pour tout réel $x$, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1, \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1, \\[2ex] 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

**b:** Démontrer que $X$ admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

**c:** La variable aléatoire $X$ admet-elle une variance ?

**5)** Soit $Y$ la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

**a:** Donner la fonction de répartition de $Y$, et montrer que $Y$ est une variable aléatoire à densité.

**b:** Montrer que $Y$ admet pour densité la fonction $f_Y$ définie par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1, \\[2ex] 0. & \text{sinon} \end{cases}$$

**c:** Montrer que $Y$ admet une espérance et la calculer.

### Partie B

**1)** Soit $D$ une variable aléatoire prenant les valeurs $-1$ et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire $Y$.
Soit $T$ la variable aléatoire définie par $T = DY$.

**a:** Déterminer la loi de la variable $Z = \dfrac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de $D$.

**b:** Justifier que $T$ admet une espérance et préciser sa valeur.

**c:** Montrer que pour tout réel $x$, on a :

$$P(T \leqslant x) = \frac{1}{2}\, P(Y \leqslant x) + \frac{1}{2}\, P(Y \geqslant -x)$$

**d:** En déduire la fonction de répartition de $T$.

**2)** Soit $U$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$ et $V$ la variable aléatoire définie par : $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$.

**a:** Rappeler la fonction de répartition de $U$.

**b:** Déterminer la fonction de répartition de $V$ et vérifier que les variable $V$ et $Y$ suivent la même loi.

**3)** **a:** Écrire une fonction en langage `Python`, d'en-tête def D(n), qui prend un entier $n \geqslant 1$ en entrée, et renvoie une liste $n$ réalisations de la variable aléatoire $D$.

**b:** On considère le script suivant :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
n=int(input("entrer n"))
V=[1/np.sqrt(1-rd.random()) for k in range(n)]
c=[D(n)[k]*V[k] for k in range(n)]
print(sum(c)/n)
```

De quelle variable aléatoire les coefficients de la liste `c` sont-ils une simulation ?
Pour `n` assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.