Chapitre 11 : équations différentielles et systèmes différentiels

I)Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Déf : on appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants toute équation différentielle du type :

$$(E): \quad y' + ay = b(t)$$

où a est une constante réelle et b une fonction continue sur $I \subset \mathbf{R}$.

On appelle solution de (E) toute fonction y dérivable sur I telle que

$$\forall t \in I,\ y'(t) + ay(t) = b(t).$$

Déf : on appelle équation différentielle homogène associée à (E) l'équation différentielle :

$$(E_0): \quad y' + ay = 0.$$

THM1 (fondamental)
L'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de (E_0) sur $\mathbf{R}$ est :

$$\mathscr{S}_0 = \left\{t \mapsto \beta e^{-at}, \beta \in \mathbf{R}\right\}.$$

$\mathscr{S}_0$ est un espace vectoriel de dimension 1.

THM2(forme des solutions)
1)L'équation différentielle (E) admet au moins une solution.

2)Soit y_p, une solution particulière de (E).

L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est de la forme :

$$\mathscr{S} = \{y_0 + y_p,\ y_0 \in \mathscr{S}_0\}$$

Exercice 1
Résoudre l'équation différentielle $y' + 3y = 6t$ sur $\mathbf{R}$.
réponse : $\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \beta e^{-3t} + 2t - \frac{2}{3},\ \beta \in \mathbf{R}\right\}$.

Exercice 2
Résoudre l'équation différentielle $y' = 2y + e^t$ sur $\mathbf{R}$.
réponse : $\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \beta e^{2t} - e^t,\ \beta \in \mathbf{R}\right\}$.

P1 (principe de superposition)
Soient a une constante réelle, b_1 et b_2 deux fonctions continues sur I.
Soit y_1 une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_1(t)$.
Soit y_2 une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_2(t)$.
Alors, $y_1 + y_2$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b_1(t) + b_2(t)$.

Exercice 3
Trouver une solution particulière de l'équation différentielle $y' - 2y = e^{-t} + 1$.
réponse : $t \mapsto -\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}$.

II)Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Déf : on appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation différentielle du type :

$$(E): \quad y'' + ay' + by = c(t)$$

où a et b sont des constantes réelles, c une fonction continue sur $I \subset \mathbf{R}$.
On appelle solution de (E) toute fonction y deux fois dérivable sur I telle que

$$\forall t \in I,\ y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t).$$

Déf : on appelle équation différentielle homogène associée à (E) l'équation différentielle :

$$(E_0): \quad y'' + ay' + by = 0.$$

THM3
Soit $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0) sur $\mathbf{R}$.
Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0 \quad (*)$
1)si $\Delta > 0$:
$\mathscr{S}_0 = \left\{t \mapsto \beta_1 e^{r_1 t} + \beta_2 e^{r_2 t}, (\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2\right\}$ où r_1 et r_2 sont les solutions de $(*)$.
2)si $\Delta = 0$:
$\mathscr{S}_0 = \left\{t \mapsto \left(\beta_1 t + \beta_2\right) e^{r_0 t}, (\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2\right\}$ où r_0 est la racine double de $(*)$.

$\mathscr{S}_0$ est un espace vectoriel de dimension 2.

THM4 (forme des solutions)
1)L'équation différentielle (E) admet au moins une solution.

2)Soit y_p, une solution particulière de (E).

L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est de la forme :

$$\mathscr{S} = \{y_0 + y_p,\ y_0 \in \mathscr{S}_0\}$$

<u>Exercice 4</u>
Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 3y = 6$ sur $\mathbf{R}$.
réponse : $\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \beta_1 e^{-t} + \beta_2 e^{-3t} + 2,\ (\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2\right\}$.

<u>Exercice 5</u>
Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = t^2$ sur $\mathbf{R}$.
réponse : $\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \left(\beta_1 t + \beta_2\right) e^t + t^2 + 4t + 6,\ (\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2\right\}$.

P2 (principe de superposition)
Soient a et b des constantes réelles, c_1 et c_2 deux fonctions continues sur I.
Soit y_1 une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_1(t)$.
Soit y_2 une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_2(t)$.
Alors, $y_1 + y_2$ est solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_1(t) + c_2(t)$.

<u>Exercice 6</u>
Trouver une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - y = t + e^{2t}$.
réponse : $t \mapsto -t + \frac{1}{3} e^{2t}$.

III)Trajectoires, points d'équilibre d'une équation différentielle

Dans tout le paragraphe, (E) désigne une équation différentielle sur I.

Déf : on appelle trajectoire de (E) tout ensemble $\{(t, y(t)), t \in I\}$ où y est une solution de (E).
Graphiquement, une trajectoire est la courbe représentative d'une solution de (E).

Déf : on dit qu'une constante réelle c est un point d'équilibre de (E) si la fonction $t \mapsto c$ est solution de (E).

Déf : on dit qu'une trajectoire $\{(t, y(t)), t \in I\}$ de (E) converge si $y(t)$ admet une limite finie quand $t \to +\infty$.

> Il n' y a pas toujours de point d'équilibre.
> Exemple : $y' + y = t$.

<u>Exercice 7</u>
Soit l'équation différentielle $(E) : y' + y = 1$.

1)Trouver les points d'équilibre de (E).

2)Résoudre (E).

3)Donner l'allure des trajectoires de (E).

IV)Systèmes différentiels

Déf : un système différentiel est un système de la forme

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{array}\right.$$

avec les conventions suivantes :

− les coefficients $a_{ij} (1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n)$ sont des constantes réelles,

− x_1, ..., x_n sont des fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Def : résoudre le système différentiel (S), c'est trouver les fonctions x_1, ..., x_n dérivables sur $\mathbf{R}$ et vérifiant pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ x_n'(t) & = & a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{array}\right.$$

> Au concours, on a en général $n = 2$ ou $n = 3$. On utilise alors les lettres x, y, z plutôt que x_1, x_2, x_3.

<u>Exercice 8 (système diagonal)</u>

Résoudre le système différentiel $(S)\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2x \\ y' & = & -4y \end{array}\right.$

réponse : $x : t \mapsto \beta e^{2t}$ et $y : t \mapsto \gamma e^{-4t}$, avec $(\beta, \gamma) \in \mathbf{R}^2$.

Exercice 9 (système triangulaire)

Résoudre le système différentiel $(S)\left\{\begin{array}{lll} x' & = & 3x+2y \\ y' & = & -y \end{array}\right.$

réponse : $x : t \mapsto -\frac{\beta}{2}e^{-t} + \gamma e^{3t}$ et $y : t \mapsto \beta e^{-t}$ avec $(\beta, \gamma) \in \mathbf{R}^2$.

P3 (écriture matricielle d'un système différentiel - important)
Le système différentiel (S) précédent peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$X' = AX.$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix}$.

Exemple :

$(S)\left\{\begin{array}{lll} x' & = & 2x+3y \\ y' & = & 5x-4y \end{array}\right.$ s'écrit matriciellement sous la forme $X' = AX$,

avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

P4 (solution particulière)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
Soient λ une valeur propre de A et V un vecteur propre de A associé à λ.
Soit (S) un système différentiel d'écriture matricielle $X' = AX \quad (*)$
Alors, la fonction vectorielle $t \mapsto e^{\lambda t}V$ est une solution (particulière) de $(*)$.

Exercice 10

Trouver une solution du système différentiel $(S)\left\{\begin{array}{lll} x' & = & 3x+y \\ y' & = & -x+y \end{array}\right.$

réponse : le système différentiel s'écrit $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 est valeur propre de A. Un vecteur propre de A associé à 2 est $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Une solution de (S) est donc $t \mapsto \left(e^{2t}, -e^{2t}\right)$. Il y en a d'autres ...

THM5 (résolution pratique des systèmes différentiels)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonalisable.

Soit (S) un système différentiel d'écriture matricielle $X' = AX \quad (*)$
Soit $(V_1, ..., V_n)$ une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de A et soient λ_1, ..., λ_n les valeurs propres correspondantes.

Les solutions de $(*)$ sont les fonctions vectorielles de la forme :

$$X : t \mapsto \beta_1 e^{\lambda_1 t}V_1 + ... + \beta_n e^{\lambda_n t}V_n$$

où β_1, ..., β_n sont des constantes réelles quelconques.

Exercice 11

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On considère le système différentiel :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} x' = x + 4y - 4z \\ y' = 3x + 2y - 4z \\ z' = 3x - 3y + z \end{array} \right.$$

1)Mq (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de A.

2)a)Vérifier que (S) s'écrit sous forme matricielle : $X' = AX \quad (*)$

b)Trouver toutes les fonctions vectorielles X solutions de $(*)$.

c)Résoudre (S).

3)Déterminer l'unique solution (f, g, h) de (S) telle que $f(0) = 1$, $g(0) = 2$ et $h(0) = 3$.

réponse

1)Les valeurs propres de A associées à V_1, V_2 et V_3 sont 1, -2 et 5.

2)b)Les solutions de $(*)$ sont les fonctions vectorielles

$$X : t \mapsto \beta_1 e^t V_1 + \beta_2 e^{-2t} V_2 + \beta_3 e^{5t} V_3$$

où β_1, β_2 et β_3 sont des constantes réelles quelconques.

Ce sont donc les fonctions $X : t \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1 e^t + \beta_3 e^{5t} \\ \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-2t} + \beta_3 e^{5t} \\ \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-2t} \end{pmatrix}$.

2)c)Les solutions de (S) sont les triplets de fonctions (x, y, z) avec :
$x : t \mapsto \beta_1 e^t + \beta_3 e^{5t}$, $y : t \mapsto \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-2t} + \beta_3 e^{5t}$ et $z : t \mapsto \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-2t}$.

3)On résout le système $\left\{ \begin{array}{lcl} \beta_1 + \beta_3 & = & 1 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & = & 2 \\ \beta_1 + \beta_2 & = & 3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \beta_1 & = & 2 \\ \beta_2 & = & 1 \\ \beta_3 & = & -1 \end{array} \right.$.

On a donc $f : t \mapsto 2e^t - e^{5t}$, $g : t \mapsto 2e^t + e^{-2t} - e^{5t}$ et $h : t \mapsto 2e^t + e^{-2t}$.

P5 (existence et unicité de la solution - Cauchy)
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ quelconque.
Soient $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Soit $t_0 \in \mathbf{R}$.
Soit (S) un système différentiel d'écriture matricielle $X' = AX \quad (*)$

Alors, il existe une unique fonction vectorielle solution de $(*)$ et vérifiant la condition initiale $X(t_0) = X_0$.

V)Trajectoires, points d'équilibre d'un système différentiel

Dans tout le paragraphe, (S) est un système différentiel d'écriture matricielle $X' = AX$ avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $n \geq 2$.

Déf : on appelle trajectoire de (S) tout ensemble $\{(x_1(t), ..., x_n(t)),\ t \in \mathbf{R}\}$ où $(x_1, ..., x_n)$ est solution de (S).

Une trajectoire est une courbe paramétrée du plan (quand $n = 2$) ou de l'espace (quand $n = 3$).

Déf : on dit qu'une trajectoire $\{(x_1(t), ..., x_n(t)),\ t \in \mathbf{R}\}$ converge si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i(t)$ admet une limite finie quand $t \to +\infty$.

En notant $l_i = \lim\limits_{t \to +\infty} x_i(t)$, on dit alors que cette trajectoire converge vers $(l_1, ..., l_n)$.

Dans le cas contraire, on dit que la trajectoire diverge.

Déf : soient c_1, ..., c_n des constantes réelles.
On dit que $(c_1, ..., c_n)$ est un point d'équilibre si $(c_1, ..., c_n)$ est solution de (S).

P6

$(c_1, ..., c_n)$ est un point d'équilibre de $(S) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix} \in E_0(A)$.

En particulier, $(0, ..., 0)$ est toujours un point d'équilibre de (S).

Déf : on dit que $(c_1, ..., c_n)$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable si toute trajectoire converge vers ce point.

P7
Supposons A diagonalisable.

1)Si toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives, alors toutes les trajectoires de (S) convergent vers le point d'équilibre $(0, ..., 0)$.
$(0, ..., 0)$ est donc asymptotiquement stable.

2)Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires de (S) convergent vers un point d'équilibre.

3)Si l'une au moins des valeurs propres de A strictement positives, la plupart des trajectoires de (S) divergent.

Exercice 12
On considère le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$$

1)Résoudre (S).

2)Déterminer l'unique point d'équilibre de (S).

3)Tracer les trajectoires de (S).
indication : commencer par dresser le tableau de variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ solutions de (S), en distinguant plusieurs cas.

4)Vérifier la véracité de P7.