Exercice 1 (eml 2018)

1)a)La première colonne de A donne $f(e_1) = -2e_2 + 1e_3$.
Donc $v = f(e_1) + e_1 = e_1 - 2e_2 + e_3 = (1, -2, 1)$.

1)b)Pour tous réels a, b et c, on a :

$$a.u + b.v + c.e_1 = 0 \iff a.(1, -1, 0) + b.(1, -2, 1) + c.(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a - 2b = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\iff a = b = c = 0.$$

Donc la famille (u, v, e_1) est libre.

C'est une famille libre de $\mathbf{R}^3$ dont le cardinal vaut 3 et coïncide avec la dimension de $\mathbf{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbf{R}^3$.

1)c)$u = 1e_1 - 1e_2 + 0e_3$, $v = 1e_1 - 2e_2 + 1e_3$ et $e_1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$.

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour calculer P^{-1}, on applique la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ \leftarrow L_2 - L_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow -L_2 \\ \\ \end{matrix}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2)a)La formule de changement de base donne :

$$\begin{aligned}
A' &= P^{-1}AP \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2)b)A' est triangulaire, ses valeurs propres sont donc ses éléments diagonaux, à savoir -1 et 2.
Les valeurs propres de f sont celles de A' car $A' = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f)$.
Donc $sp(f) = \{-1, 2\}$.
Cherchons la dimension des sous-espaces propres de f.

$$\begin{aligned}
dimE_{-1}(f) &= dimKer(f + \mathrm{Id}) \\
&= 3 - rg(f + \mathrm{Id}) \quad \text{par le théorème du rang} \\
&= 3 - rg(A' + I).
\end{aligned}$$

Or, $A' + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 puisque ses deux colonnes non nulles ne sont pas colinéaires.
Ainsi, $dimE_{-1}(f) = 1$.
De même, $dimE_2(f) = 3 - rg(A' - 2I)$.
Avec $A' - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 pour les mêmes raisons.
Ainsi, $dimE_2(f) = 1$.
$dimE_{-1}(f) + dimE_2(f) = 2 < dim\mathbf{R}^3 = 3$ donc f n'est pas diagonalisable d'après le théorème de réduction.

2)c)0 n'est pas valeur propre de f donc f est bijectif.

2)d)$A' = P^{-1}AP$.

3)a)$g(e_1) = g(1,0,0) = (1,0,-1) = 1e_1 + 0e_2 - 1e_3$,
$g(e_2) = g(0,1,0) = (1,2,1) = 1e_1 + 2e_2 + 1e_3$,
$g(e_3) = g(0,0,1) = (-1,0,1) = -1e_1 + 0e_2 + 1e_3$.
Donc $B = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3)b)On trouve immédiatement $B^2 = 2B$.

3)c)•L'égalité précédente s'écrit : $B^2 - 2B = 0$, c'est-à-dire $P(B) = 0$ où $P(X) = X^2 - 2X$.
P est donc un polynôme annulateur de B.
Les racines de P sont 0 et 2. Donc $sp(B) \subset \{0, 2\}$.
Or, $sp(g) = sp(B)$ puisque $B = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(g)$. Donc $sp(g) \subset \{0, 2\}$.
• $E_0(g) = \big\{w \in \mathbf{R}^3 \mid g(w) = 0\big\}$.
Posons $w = (x, y, z)$ et $W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ son vecteur colonne dans $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned} g(w) = 0 &\iff BW = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array} \right. \\ &\iff y = 0 \text{ et } x = z \end{aligned}$$

Donc $E_0(g) = \{(x, y, z) \mid y = 0, x = z\} = \{(x, 0, x), x \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}\,\big((1, 0, 1)\big)$.
$E_0(g)$ est non nul donc 0 est valeur propre de g et le sous-espace propre de g associé à 0 est $E_0(g)$.
De plus, $\big((1, 0, 1)\big)$ est une famille génératrice de $E_0(g)$ et libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_0(g)$.
• $E_2(g) = \big\{w \in \mathbf{R}^3 \mid (g - 2\text{Id})(w) = 0\big\}$.
Posons $w = (x, y, z)$ et $W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ son vecteur colonne dans $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned} (g - 2\text{Id})(w) = 0 &\iff (B - 2I)W = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff -x + y - z = 0 \\ &\iff y = x + z. \end{aligned}$$

Donc $E_2(g) = \{(x, y, z) \mid y = x + z\} = \big\{(x, x + z, z), (x, z) \in \mathbf{R}^2\big\}$
$= \text{Vect}\,\big((1, 1, 0), (0, 1, 1)\big)$.
$E_2(g)$ est non nul donc 2 est valeur propre de g et le sous-espace propre de g associé à 2 est $E_2(g)$.
De plus, $\big((1, 1, 0), (0, 1, 1)\big)$ est une famille génératrice de $E_2(g)$ et libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $E_2(g)$.

3)g)$dimE_0(g) + dimE_2(g) = 3 = dim\mathbf{R}^3$ donc g est diagonalisable d'après le théorème de réduction.

4)a)• $\mathscr{E} \subset \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

• $\mathscr{E}$ est non vide car la matrice nulle est dans $\mathscr{E}$ puisque $B0 = 0A$.

• Soient M et N dans $\mathscr{E}$ et λ un réel.

$$\begin{aligned} B(\lambda M + N) &= \lambda BM + BN \\ &= \lambda MA + NA \quad \text{car } M \in \mathscr{E} \text{ et } N \in \mathscr{E} \\ &= (\lambda M + N)A. \end{aligned}$$

Donc $\lambda M + N \in \mathscr{E}$.

$\mathscr{E}$ est une partie non vide de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ donc un espace vectoriel.

4)b)Soit $M \in \mathscr{E}$. Supposons M inversible.
L'égalité $BM = MA$ donne alors $BMM^{-1} = MAM^{-1}$, c'est-à-dire $B = MAM^{-1}$.
A est inversible (puisque f est bijectif) ainsi que M et M^{-1}.
Par produit, MAM^{-1} est inversible. Donc B est inversible.
C'est absurde car 0 est valeur propre de g donc de B.

Aucune matrice de $\mathscr{E}$ n'est donc inversible.

5)a)
$$\begin{aligned} {}^t(A - \lambda I) &= {}^tA - \lambda\, {}^tI \quad \text{par linéarité de la trace} \\ &= {}^tA - \lambda I \quad \text{car } I \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

Une matrice et sa transposée ayant même rang, on a donc :
$rg(A - \lambda I) = rg({}^tA - \lambda I)$.

5)b)La question précédente entraîne que $A - \lambda I$ n'est pas inversible si et seulement si ${}^tA - \lambda I$ n'est pas inversible.
Ainsi, A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.
Donc $sp({}^tA) = sp(A) = \{-1, 2\}$.
En outre, $sp(B) = \{0, 2\}$.
B et ${}^tA$ ont donc comme seule valeur propre commune $\alpha = 2$.

5)c)Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de B associé à 2.

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de ${}^tA$ associé à 2.

Alors, $N = X\,{}^tY = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{pmatrix}$.

X et Y étant des vecteurs propres, ils sont non nuls. Il existe donc $i \in [\![1, 3]\!]$ et $j \in [\![1, 3]\!]$ tels que $x_i \neq 0$ et $y_j \neq 0$.

Alors, $x_iy_j \neq 0$, ce qui prouve que l'un des coefficients de N n'est pas nul donc que N est non nulle.

De plus, $BN = BX^tY$
$$\begin{aligned} &= 2X^tY \\ &= X^t(2Y) \\ &= X^t\left({}^tAY\right) \\ &= X^tY^t({}^tA) \\ &= X^tYA \\ &= NA. \end{aligned}$$

Donc $N \in \mathscr{E}$.

5)d)${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, puis ${}^tA - 2I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Posons $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On voit que $\left({}^tA - 2I\right)Y = 0$ donc Y est vecteur propre de ${}^tA$ associé à 2.

Par ailleurs, on a vu dans la question 3)c) que $E_2(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Posons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vecteurs propres de B associés à 2.

Posons $N_1 = X_1^tY$ et $N_2 = X_2^tY$.

On trouve $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

D'après la question précédente, N_1 et N_2 sont des éléments non nuls de $\mathscr{E}$.
(N_1, N_2) est une famille libre car N_1 et N_2 ne sont pas colinéaires.
C'est aussi une famille génératrice de Vect (N_1, N_2).
Donc (N_1, N_2) est une base de Vect (N_1, N_2).
Donc la dimension de Vect (N_1, N_2) vaut 2.
Or, Vect $(N_1, N_2) \subset \mathscr{E}$. Donc $dim(\mathscr{E}) \geq 2$.

Exercice 2 (eml 2018)

Partie I

1)f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme différence de fonctions dérivables et $\forall x>0, f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$. Par différence, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

Quand $x\to+\infty$, on écrit : $f(x)=x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2)f est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$. Elle réalise donc une bijection de $]0,1[$ sur $]1,+\infty[$.
$2\in\,]1,+\infty[$ admet donc un unique antécédent $a\in\,]0,1[$ par f.

De même, f est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$.
$2\in\,]1,+\infty[$ admet donc un unique antécédent $b\in\,]1,+\infty[$ par f.

Enfin, $f(1)=1\neq 2$.

L'équation $f(x)=2$ admet donc deux solutions, l'une est $a\in\,]0,1[$, l'autre est $b\in\,]1,+\infty[$.

3)$f(2)=2-\ln 2\approx 1,3$
$f(4)=4-\ln 4=4-2\ln 2\approx 2,6$
$f(b)=2$.

Donc $f(2)\leq f(b)\leq f(4)$.

Comme f est croissante sur $[2,4]$, on déduit que $2\leq b\leq 4$.

Partie II

4)Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$:≪ U_n existe et $U_n \geq b$ ≫ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Par énoncé, $U_0 \geq 4$ et $b \leq 4$ donc U_0 existe et $U_0 \geq b$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a : $U_n \geq b > 0$ donc $U_n > 0$.
Ainsi, $U_n \in D_f$ donc $f(U_n)$ existe, c'est-à-dire U_{n+1} existe.
De $U_n \geq b$, on déduit par croissance du logarithme que $\ln U_n \geq \ln b$, puis $\ln U_n + 2 \geq \ln b + 2$, c'est-à-dire $U_{n+1} \geq \ln b + 2 \quad (*)$
Or, $f(b) = 0$ donne $b - \ln b = 2$, soit $\ln b + 2 = b$.
En reportant dans $(*)$, on a : $U_{n+1} \geq b$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On conclut que pour tout $n \in \mathbf{N}$, U_n existe et $U_n \geq b$.

5)Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} \leq U_n$.
Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : ≪ $U_{n+1} \leq U_n$ ≫.
$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : ≪ $U_1 \leq U_0$ ≫.
Or, $U_0 = 4$ et $U_1 = \ln U_0 + 2 = \ln 4 + 2 = 2\ln 2 + 2 \approx 3,4$. Donc $U_1 \leq U_0$.
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a $U_{n+1} \leq U_n$.
Par croissance du logarithme, on déduit :
$\ln U_{n+1} \leq \ln U_n$, puis $\ln U_{n+1} + 2 \leq \ln U_n + 2$, c'est-à-dire : $U_{n+2} \leq U_{n+1}$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} \leq U_n$, ce qui prouve que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

$(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée par b donc convergente vers L.
Par passage à la limite, on a : $L \geq b$.

La fonction $g : x \mapsto \ln x + 2$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc en L.
De plus, on a $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} = g(U_n)$.
D'après le théorème du point fixe, L est un point fixe de g donc est solution de l'équation $g(x) = x$.
Or, $g(x) = x \Longleftrightarrow \ln x + 2 = x \Longleftrightarrow f(x) = 2 \Longleftrightarrow x = a$ ou $x = b$.

On ne peut pas avoir $L = a$ car $L \geq b$ donc $L = b$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = b$.

6)a)$g : x \mapsto \ln x + 2$ est dérivable sur $[b, +\infty[$ et $\forall x \geq b, g'(x) = \dfrac{1}{x}$.
$\forall x \geq b, g'(x) \leq \dfrac{1}{b}$ et comme $b \geq 2$, on déduit que $\forall x \geq b, g'(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout réel $a \geq b$, on a :
$g(a) - g(b) \leq \dfrac{1}{2}(a-b)$.

Comme $U_n \geq b$, il est licite de prendre $a = U_n$, on obtient alors :
$\forall n \in \mathbf{N}, g(U_n) - g(b) \leq \dfrac{1}{2}(U_n - b)$.

Or, $g(U_n) = U_{n+1}$ et $g(b) = b$ donc $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(U_n - b)$.

6)b)On sait déjà que $\forall n \in \mathbf{N}, U_n \geq b$ donc $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq U_n - b$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, U_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : $\ll\ U_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}\ \gg$.

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : $\ll\ U_0 - b \leq \dfrac{1}{2^{-1}}\ \gg$.

Or, $U_0 - b \leq \dfrac{1}{2^{-1}} \Longleftrightarrow 4 - b \leq 2 \Longleftrightarrow b \geq 2$, ce qui est vrai.
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a : $U_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

En multipliant membre à membre par $\frac{1}{2}$, on obtient : $\dfrac{1}{2}(U_n - b) \leq \dfrac{1}{2^n}$.

Or, $U_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(U_n - b)$.

En recollant les inégalités, on a : $U_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2^n}$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}, U_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq U_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

7)a)programme :

```
import numpy as np
def suite(n):
    u=4
    for k in range(n):
        u=np.log(u)+2
    return u
```

7)b)On sait que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et converge vers b.
Dès que $\frac{1}{2^{n-1}} \leq \epsilon$, on a $U_n - b \leq \epsilon$ et U_n est alors une valeur approchée de b à epsilon près, d'où le programme suivant :

```
def valeur_approchee(epsilon):
    n=1
    while 1/2**(n-1)>epsilon:
        n=n+1
    return(suite(n))
```

Partie III

8)La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on a aussi $2x > 0$. Donc $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$ existe.

$t \mapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc admet sur $]0,+\infty[$ une primitive G.

Pour tout $x > 0$, on a alors : $\phi(x) = G(2x) - G(x)$.

ϕ est dérivable par différence et composée de fonctions dérivables et pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
G'(x) &= 2G'(2x) - G'(x)\\
&= 2 \times \frac{1}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)}\\
&= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln x}\\
&= \frac{2(x - \ln x) - (2x - \ln(2x))}{(x - \ln x)\,(2x - \ln(2x))}\\
&= \frac{\ln(2x) - 2\ln x}{(x - \ln x)\,(2x - \ln(2x))}\\
&= \frac{\ln 2 + \ln x - 2\ln x}{(x - \ln x)\,(2x - \ln(2x))}\\
&= \frac{\ln 2 - \ln x}{(x - \ln x)\,(2x - \ln(2x))}.
\end{aligned}$$

9)On sait que $\forall x > 0, f(x) > 0$ donc $\forall x > 0, x - \ln x > 0$.
On a également $\forall x > 0, f(2x) > 0$ donc $\forall x > 0, 2x - \ln(2x) > 0$.

Donc $\phi'(x) \geq 0 \iff \ln 2 - \ln x \geq 0 \iff \ln x \leq \ln 2 \iff x \leq 2$.

x	0		2		$+\infty$
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\phi(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

10)Soit $x > 0$.

$\forall t \in [x, 2x]\,, f(t) \geq 1$ donc $\forall t \in [x, 2x]\,, 0 \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq 1$.

Par croissance de l'intégrale ($x \leq 2x$), on a : $0 \leq \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} 1\mathrm{d}t$.

Or, $\displaystyle\int_x^{2x} 1\mathrm{d}t = (2x - x) \times 1 = x$.

Donc $\forall x > 0, 0 \leq \phi(x) \leq x$.

11)a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \phi(x) = 0$.

Cette limite est finie donc ϕ est prolongeable par continuité en 0.
On pose alors $\phi(0) = \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \phi(x) = 0$.

11)b)Quand $x \to 0^+$, on a : $\ln 2 - \ln x \sim -\ln x$.

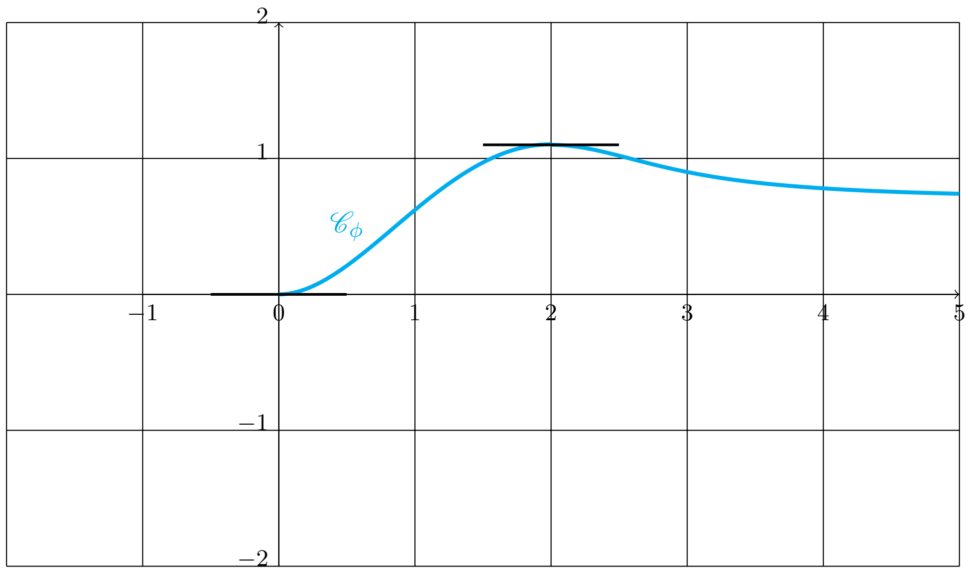
En effet, $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln 2 - \ln x}{-\ln x} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{\ln 2}{\ln x} + 1 = 1$ car $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

De même, quand $x \to 0^+$, on a : $x - \ln x \sim -\ln x$ et $2x - \ln(2x) \sim -\ln(2x)$.

Par quotient, quand $x \to 0^+$, on a : $\phi'(x) \sim -\dfrac{1}{\ln(2x)}$.

$\displaystyle\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{\ln(2x)} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \phi'(x) = 0$.

12)La tangente à $\mathscr{C}_\phi$ en 0 a pour équation $y = \phi'(0)x + \phi(0)$.
Or, $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) = 0$.
Donc cette tangente a pour équation $y = 0$.



Partie IV

13)a)$\forall (x,y) \in U, \partial_1 H(x,y) = x - y - 2$ et $\partial_2 H(x,y) = -x + e^y$.

13)b)Les points critiques de H sont les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lll} \partial_1 H(x,y) & = & 0 \\ \partial_2 H(x,y) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lll} x - y - 2 & = & 0 \\ -x + e^y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ e^y = x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x - \ln x - 2 = 0 \\ y = \ln x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} f(x) = 2 \\ y = \ln x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = a \text{ ou } x = b \\ y = \ln x \end{array}\right.$$

Les points critiques de H sont $(a, \ln a)$ et $(b, \ln b)$.

14)a)$\partial_{1,1} H(x,y) = 1$, $\partial_{1,2} H(x,y) = \partial_{2,1} H(x,y) = -1$, $\partial_{2,2} H(x,y) = e^y$.

Donc $\nabla^2 H(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & e^y \end{pmatrix}$.

On déduit $M_a = \nabla^2 H(a, \ln a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$.

14)b)λ est valeur propre de M_a
$\iff M_a - \lambda I$ n'est pas inversible
$\iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & a-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible
$\iff (1-\lambda)(a-\lambda) - 1 = 0$
$\iff \lambda^2 - (a+1)\lambda + a - 1 = 0$.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de M_a sont donc les racines du polynôme $X^2 - (a+1)X + a - 1$.

On a donc $X^2 - (a+1)X + a - 1 = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$, ce qui donne en développant le membre de droite :

$X^2 - (a+1)X + a - 1 = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2$.

En identifiant, on obtient : $\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = a + 1 \\ \lambda_1\lambda_2 = a - 1 \end{array}\right.$

14)c)Comme $a < 1$, on a $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Donc λ_1 et λ_2 sont de signes contraires. H ne présente pas d'extrémum local en $(a, \ln a)$. C'est un point selle.

15)Notons M_b la matrice hessienne de H au point $(b, \ln b)$.
En faisant le même raisonnement, les valeurs propres γ_1 et γ_2 de M_b vérifient :

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = b + 1 \\ \gamma_1 \gamma_2 = b - 1 \end{cases}$$

Comme $b > 1$, on a $\gamma_1 \gamma_2 > 0$. Donc γ_1 et γ_2 sont de même signe.

Comme de plus, $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, on a finalement $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$.

Ainsi, H présente en $(b, \ln b)$ un minimum local.

Exercice 3 (eml 2018)
Dans tout l'exercice, introduisons pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ les événements :
$P_k = \ll$ le k-ième lancer fait pile $\gg$ et $F_k = \ll$ le k-ième lancer fait face $\gg$.

Partie I

1)a)$(X = 0) = (P_1 \cap P_2)$

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(P_1 \cap P_2) \\ &= P(P_1)P(P_2) \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

$(X = 1) = (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P\big((F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)\big) \\ &= P\big(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= P(F_1)P(P_2)P(P_3) + P(P_1)P(F_2)P(P_3) \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

$(X = 2) = (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)$
Avec les mêmes arguments d'incompatibilité, puis d'indépendance, on déduit :
$P(X=2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}.$

b)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'événement $(X = n)$ est la réunion des $n+1$ événements incompatibles suivants qu'on obtient en déplaçant le premier pile (pouvant prendre $n+1$ positions) :

$P_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}$,

$F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap ... \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}$,

etc...

$F_1 \cap ... \cap F_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}$,

$F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}$.

Chacun de ces événements possède exactement 2 pile et n face.

Par indépendance, leur probabilité vaut : $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4}{3^{n+2}}$.

Puis, par incompatibilité, ces $n+1$ probabilités s'ajoutent.

Donc $P(X = n) = (n+1) \times \frac{4}{3^{n+2}}$, égalité qui reste vraie pour $n = 0$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N},\ P(X = n) = (n+1) \times \frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II

2)a)Lorsque $X = n$, alors U prend toutes les valeurs entre 0 et n.
Comme n peut prendre toutes les valeurs entières, on a :
$U(\Omega) = \left\{[\![0, n]\!],\ n \in \mathbf{N}\right\} = \mathbf{N}$.

b)Il s'agit de déterminer $P_{(X=n)}(U = k)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $k \in \mathbf{N}$.

• $k > n$
Comme l'urne contient les boules numérotées $\boxed{0}$, $\boxed{1}$,...,$\boxed{n}$ et que $k > n$, il est impossible de tirer une boule numérotée $\boxed{k}$.
Donc $P_{(X=n)}(U = k) = 0$.

• $k \leq n$
Cette fois-ci, la boule numérotée $\boxed{k}$ figure dans la liste des boules de l'urne.
Il y a $n+1$ boules dans cette urne, la probabilité de tirer la boule numérotée $\boxed{k}$ est donc $\dfrac{1}{n+1}$.
Ainsi, $P_{(X=n)}(U = k) = \dfrac{1}{n+1}$.

Finalement, $P_{(X=n)}(U = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{si } k \leq n \end{cases}$

c)Soit $k \in \mathbf{N}$.
La formule des probabilités totales pour le sce $(X = n)_{n\in\mathbf{N}}$ donne :

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{(X=n)}(U = k)P(X = n) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} P_{(X=n)}(U = k)P(X = n) + \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(X=n)}(U = k)P(X = n) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} 0 \times P(X = n) + \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}P(X = n) \quad \text{d'après II)2)b)} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}P(X = n). \end{aligned}$$

Puis, grâce à la question I)1)b) :

$$
\begin{aligned}
P(U=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1) \times \frac{4}{3^{n+2}} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{4}{3^{n+2}} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{4}{3^{i+k+2}} \quad \text{en posant } i = n-k \\
&= \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i \\
&= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1-1/3} \\
&= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2} \\
&= \frac{2}{3^{k+1}}.
\end{aligned}
$$

d)• U admet une espérance ssi la série $\sum_{k\geq 0} \left|kP(U=k)\right|$ converge.

Or, $\forall k \in \mathbf{N}$, $\left|kP(U=k)\right| = \dfrac{2k}{3^{k+1}} = \dfrac{2}{9} \times k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$.

La série $\sum_{k\geq 0} k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$ converge (série dérivée première dont le paramètre appartient à $]-1,1[$).

Donc la série $\sum_{k\geq 0} \left|kP(U=k)\right|$ converge.

Donc U admet une espérance donnée par :

$$
\begin{aligned}
E(U) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(U=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{9} \times k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&= \frac{2}{9} \times \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\
&= \frac{2}{9} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

• D'après le théorème de transfert, $U(U-1)$ admet une espérance ssi la série $\sum_{k\geq 0}\left|k(k-1)P(U=k)\right|$ converge.

Or, $\forall k\in\mathbf{N},\ \left|k(k-1)P(U=k)\right| = \dfrac{2k(k-1)}{3^{k+1}} = \dfrac{2}{27}\times k(k-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-2}$.

La série $\sum_{k\geq 0} k(k-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-2}$ converge (série dérivée seconde dont le paramètre appartient à $]-1,1[$).

Donc la série $\sum_{k\geq 0}\left|k(k-1)P(U=k)\right|$ converge.

Donc $U(U-1)$ admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E\big(U(U-1)\big) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P(U=k)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{27}\times k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\\
&= \frac{2}{27}\times\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\\
&= \frac{2}{27}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Comme U et $U(U-1)$ admettent une espérance, alors U^2 admet une espérance donnée par :

$E\big(U^2\big) = E\big(U(U-1)+U\big) = E\big(U(U-1)\big)+E(U) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} = 1.$

Enfin, d'après la formule de Koënig, U admet une variance donnée par :

$V(U) = E\big(U^2\big) - E(U)^2 = 1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}.$

3)a)Lorsque $X=n$, alors U peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et n.
On déduit :

$V(\Omega) = \{n-k,\ k\in[\![0,n]\!], n\in\mathbf{N}\} = \{j\in[\![0,n]\!], n\in\mathbf{N}\} = \mathbf{N}.$

b)Il s'agit de déterminer $P_{(X=n)}(V=k)$ pour tout $n\in\mathbf{N}$ et tout $k\in\mathbf{N}$.

• $k>n$
$P_{(X=n)}(V=k) = P_{(X=n)}(X-U=k) = P_{(X=n)}(n-U=k)$
$= P_{(X=n)}(U=n-k) = 0$ car $n-k<0$ et $U(\Omega)=\mathbf{N}$.

• $k \leq n$
En reprenant les calculs ci-dessus, on a :
$P_{(X=n)}(V=k) = P_{(X=n)}(U=n-k) = \dfrac{1}{n+1}$.

Finalement, $P_{(X=n)}(V=k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{si } k \leq n \end{cases}$

c)Par le même raisonnement que pour la question 2)c), on obtient :
$\forall k \in \mathbf{N},\ P(V=k) = \dfrac{2}{3^{k+1}}$.

✓ U et V ont donc même loi.

4)Pour tout couple $(i,j) \in \mathbf{N}^2$, on a :

$$\begin{aligned} P(U=i \cap V=j) &= P\big((U=i) \cap (X-U=j)\big) \\ &= P\big((U=i) \cap (X-i=j)\big) \\ &= P\big((U=i) \cap (X=i+j)\big) \\ &= P_{(X=i+j)}(U=i)P(X=i+j) \\ &= \frac{1}{i+j+1} \times (i+j+1) \times \frac{4}{3^{i+j+2}} \quad \text{grâce à 1)b) et 2)b)} \\ &= \frac{2}{3^{i+1}} \times \frac{2}{3^{j+1}} \\ &= P(U=i)P(V=j). \end{aligned}$$

Donc U et V sont indépendantes.

5)Comme U et V sont indépendantes, on a : $cov(U,V) = 0$.
On déduit :

$$\begin{aligned} cov(X,U) &= cov(U+V,U) \\ &= cov(U,U) + cov(V,U) \quad \text{par bilinéarité} \\ &= cov(U,U) + cov(U,V) \quad \text{par symétrie} \\ &= V(U) + cov(U,V) \\ &= \frac{3}{4} + 0 \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Partie III

6)a)programme :

```
import numpy.random as rd
def simule_X():
    pile=0
    face=0
    while pile<2:
        x=rd.random()
        if x<2/3:
            pile=pile+1
        else:
            face=face+1
    return(face)
```

b)programme :

```
def mystere(p):
    r=0
    N=10**4
    for k in range(N):
        x=simule_X()
        y=simule_Y(p)
        if x<=y:
            r=r+1/N
    return r
```

Explications :
On effectue le jeu 10000 fois.
Pour chaque jeu, on teste si $x \leq y$, c'est-à-dire si le joueur A gagne le jeu.
Si c'est le cas, on augmente r de $1/N$.
r étant initialement égal à 0 et augmentant de $1/N$ à chaque gain du joueur A, sa valeur au bout de 10000 parties correspond à la fréquence de gain du joueur A.

c)Pour que le jeu soit équilibré, il faut que la probabilité que A gagne vale $1/2$, ce qui correspond graphiquement à la valeur $p = 0,8$.

7)a)Pour le joueur B, l'expérience aléatoire est constituée d'un certain nombre de lancers successifs et indépendants.
A chaque lancer, la probabilité de succès (=faire pile) vaut p.
Z représente le rang d'obtention du premier succès.

Donc $Z \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Le cours donne : $E(Z) = \dfrac{1}{p}$ et $V(Z) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

b)$Y = Z - 1$.

Comme Z admet une espérance et que Y est une fonction affine de Z, alors Y admet une espérance donnée par :

$E(Y) = E(Z-1) = E(Z) - 1$ par linéarité. D'où $E(Y) = \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{1-p}{p}$.

Comme Z admet une variance et que Y est une fonction affine de Z, alors Y admet une variance donnée par :

$V(Y) = V(Z-1) = 1^2 V(Z) = V(Z) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

c)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(Y \geq n) &= P(Z - 1 \geq n) \\
&= P(Z \geq n+1) \\
&= 1 - P(Z \leq n) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n} P(Z = k) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p \\
&= 1 - p \times \sum_{j=0}^{n-1} (1-p)^j \qquad \text{en posant } j = k-1 \\
&= 1 - p \times \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} \\
&= 1 - p \times \frac{1-(1-p)^n}{p} \\
&= 1 - \big(1 - (1-p)^n\big) \\
&= (1-p)^n.
\end{aligned}$$

8)a)La formule des probabilités totales pour le sce $(X = n)_{n \in \mathbf{N}}$ donne :

$$\begin{aligned}
P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\big((X = n) \cap (X \leq Y)\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P\big((X = n) \cap (n \leq Y)\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P\big((X = n) \cap (Y \geq n)\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P(Y \geq n) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y.
\end{aligned}$$

b)De 7)b) et 8)a), on déduit :

$$\begin{aligned}
P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \times \frac{4}{3^{n+2}} \times (1-p)^n \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{4}{3^{k+1}} \times (1-p)^{k-1} \quad \text{en posant } k = n+1 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3^{k-1}} \times (1-p)^{k-1} \\
&= \frac{4}{9} \times \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1-p}{3}\right)^{k-1} \\
&= \frac{4}{9} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1-p}{3}\right)^2} \\
&= \frac{4}{9} \times \frac{1}{\frac{(2+p)^2}{9}} \\
&= \frac{4}{(2+p)^2}.
\end{aligned}$$

c)Le jeu est équilibré si $P(X \leq Y) = \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
P(X \leq Y) = \frac{1}{2} &\iff \frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \\
&\iff (2+p)^2 = 8 \\
&\iff 2 + p = \sqrt{8} \text{ ou } 2 + p = -\sqrt{8} \\
&\iff p = \sqrt{8} - 2 \text{ ou } \underbrace{p = -\sqrt{8} - 2}_{\text{impossible car négatif}}
\end{aligned}$$

En conclusion, le jeu est équilibré ssi $p = \sqrt{8} - 2$.

✓ $\sqrt{8} - 2 = 2\sqrt{2} - 2 \approx 2 \times 1,4 - 2 \approx 0,8$.
On retrouve la valeur conjecturée en 6)c).