ESSEC II 2017, option économique

Etudier l'évolution des inégalités dans la répartition des richesses, matérielles ou symboliques, dans une société est un des thèmes majeurs des sciences humaines. Considérons un exemple élémentaire. Le tableau ci-dessous présente le pourcentage d'accès à l'enseignement secondaire en Grande-Bretagne lors de deux périodes pour deux catégories sociales :

	avant 1910	entre 1935 et 1940
Profession libérale	37%	62%
Ouvriers	1%	10%

On propose trois modes de comparaison des inégalités entre les deux classes sociales.

1. En regardant l'augmentation des pourcentages pour les deux classes entre les deux périodes on conclut que l'inégalité a augmenté entre la classe la plus aisée (Profession libérale) et la plus défavorisée (Ouvriers).
2. Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages, comme $\frac{10}{1} > \frac{62}{37}$, on déduit que l'inégalité a diminué.
3. Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages *de ceux qui n'accèdent pas à l'enseignement secondaire*, comme $\frac{90}{99} > \frac{38}{63}$, on déduit que l'inégalité a augmenté puisque le nombre de ceux qui n'ont pas accès à l'enseignement supérieur a proportionnellement plus diminué que celui de ceux qui y ont accès.

Comme on le voit chacune des façons de voir est légitime à sa manière. L'objet du problème est d'introduire des outils afin d'étudier la *concentration* d'une loi de probabilité pour contourner des paradoxes auxquels une analyse trop rapide peut conduire, ou du moins d'en être conscient.

I Indice de Gini

On rappelle qu'une fonction numérique définie sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ est *convexe* sur J si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall (t_1, t_2) \in J^2,\ \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda f(t_1) + (1-\lambda) f(t_2) \qquad (*)$$

On rappelle en outre qu'une fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.
On désigne par E l'ensemble des applications f définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, continues et **convexes** sur $[0,1]$, et telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Pour toute application f de E, on note $\tilde{f}$ l'application associée à f, définie sur $[0,1]$ par $\tilde{f}(t) = t - f(t)$.

On définit enfin l'**indice de Gini** de f par : $I(f) = 2\int_0^1 \tilde{f}(t)dt = 2\int_0^1 \big(t - f(t)\big)dt$.

1. (a) Donnez une interprétation géométrique de la propriété $(*)$.
   (b) Lorsque f est une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$, rappeler la caractérisation de la convexité de f sur $[0,1]$ à l'aide de la dérivée f'.
2. Soit $f \in E$.
   (a) Justifier que $\tilde{f}$ est concave sur $[0,1]$.
   (b) Montrer que $I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)dt$.
   (c) Justifier que $\forall t \in [0,1]$, $f(t) \leq t$, puis représenter dans un même repère orthonormé les fonctions f et $t \mapsto t$. Donner alors une interprétation géométrique de $I(f)$.

3. **Un premier exemple**.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0,1]$.

   (a) Montrer que f est un élément de E.

   (b) Calculer $I(f)$.

4. **Propriétés de l'indice de Gini.**

   (a) Etablir que $\forall f \in E,\ I(f) \geq 0$.

   (b) Montrer que $\forall f \in E,\ I(f) = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in [0,1]\,,\ f(t) = t$.

   (c) Montrer que $\forall f \in E,\ I(f) < 1$.

   (d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n$.

      i. Pour tout entier n strictement positif, calculer $I(f_n)$.

      ii. En déduire que pour tout réel A vérifiant $0 \leq A < 1$, il existe f appartenant à E telle que $A < I(f) < 1$.

5. **Minoration de l'indice de Gini**
Soit $f \in E$.

   (a) Justifier que $\tilde{f}$ admet un maximum sur $[0,1]$ atteint en un certain réel $t_0 \in]0,1[$.

   (b) Montrer que pour tout t de $[0, t_0]$, $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0).\dfrac{t}{t_0}$.

   (c) Montrer que pour tout t de $[t_0, 1]$, $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0).\dfrac{t-1}{t_0-1}$.

   (d) En déduire que $I(f) \geq \tilde{f}(t_0)$.

L'indice de Gini donne une indication sur la concentration des richesses d'un pays si l'on suppose que la fonction f rend compte de cette concentration. Par exemple, $f(0,3) = 0,09$ s'interprète par le fait que dans la population classée par ordre de richesse croissante, les premiers 30% de la population possèdent 9% de la richesse totale du pays. Plus l'indice $I(f)$ est grand, plus la répartition des richesses est inégalitaire.

II Le cas à densité

Soit g une fonction continue et strictement positive sur $[0,+\infty[$.
On suppose que $\int_0^{+\infty} g(v)dv$ converge et vaut 1.

A la fonction g, on associe une fonction G définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ G(x) = \int_0^x g(v)dv.$$

Si g représente la densité de population classée suivant son revenu croissant, $G(x)$ représente la proportion de la population dont le revenu est inférieur à x.

On suppose de plus que $\int_0^{+\infty} vg(v)dv$ est convergente.

On admet que la valeur m de cette intégrale représente la richesse moyenne de la population.

6. (a) Justifier que $m > 0$.
   (b) Justifier que G est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et préciser sa dérivée.
   (c) Montrer que G est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$. On notera G^{-1} son application réciproque.
   (d) Quel est le sens de variation de G^{-1} sur $[0,1[$?

7. (a) A l'aide du changement de variable $u = G(v)$, établir que pour tout $t \in [0,1[$,

$$\int_0^t G^{-1}(u)du = \int_0^{G^{-1}(t)} vg(v)dv.$$

   (b) En déduire que $\int_0^1 G^{-1}(u)du$ converge et donner sa valeur.

8. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(t) = \dfrac{1}{m}\int_0^t G^{-1}(u)du$ pour tout $t \in [0,1[$ et $f(1) = 1$.
   (a) i. Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
       ii. Montrer que f est convexe sur $[0,1[$. **On admettra qu'en fait f est convexe sur $[0,1]$.**
       iii. En déduire que f est un élément de E.
   (b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, l'égalité

$$I(f) = -1 + \frac{2}{m}\int_0^{+\infty} vg(v)G(v)dv.$$

9. Soit λ un réel strictement positif.
   On suppose dans cette question que $g : v \mapsto \lambda e^{-\lambda v}$.
   (a) Vérifier que $\int_0^{+\infty} g(v)dv$ converge et vaut 1.
   (b) Expliciter $G(x)$ en fonction de x pour $x \geq 0$.
   (c) Expliciter $G^{-1}(u)$ pour $u \in [0,1[$.
   (d) Calculer la valeur de m.
   (e) Soit $t \in [0,1[$. Montrer que $f(t) = -\int_0^t \ln(1-u)du$.
   (f) En déduire que pour tout t élément de $[0,1[$, on a $f(t) = (1-t)\ln(1-t) + t$.
   (g) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)dt$ et la calculer.
   (h) En déduire la valeur de $I(f)$.

III Application à une population

Une population de N personnes est divisée en deux classes (typiquement hommes et femmes) et en n catégories (par exemple socio-professionnelles), suivant le tableau à double entrée suivant où tous les x_i et y_i pour i dans $[\![1, n]\!]$ sont des entiers naturels. On suppose ne outre que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $x_i \neq 0$.

Classes \ Catégories	c_1	c_2	c_3	...	c_i	...	c_n	Total
I	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n	X
II	y_1	y_2	y_3	...	y_i	...	y_n	Y
Total	n_1	n_2	n_3	...	n_i	...	n_n	N

où on a donc posé $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i$ et $X + Y = N$. On suppose en outre que $Y > 0$.

Pour i appartenant à $[\![1, n]\!]$, on adopte les notations suivantes :

$$p_i = \frac{n_i}{N},\ q_i = \frac{x_i}{X},\ r_i = \frac{y_i}{Y}.$$

On note aussi $\varepsilon_i = \dfrac{x_i}{n_i}$, et $\varepsilon = \dfrac{X}{N}$, et on suppose que les catégories sont numérotées de telle sorte que

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq ... \leq \varepsilon_n \qquad (**)$$

On pose $P_0 = Q_0 = R_0 = 0$, et pour $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i = \sum_{h=1}^{i} p_h$, $Q_i = \sum_{h=1}^{i} q_h$ et $R_i = \sum_{h=1}^{i} r_h$.

10. On pose $\Omega = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$, ensemble des catégories dans la population.
Montrer que $P = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$, $Q = (q_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $R = (r_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des distributions de probabilités.

11. Dans un premier temps, nous allons construire une application appartenant à E, qui permet de mesurer les inégalités à l'intérieur de la classe I.
On définit alors l'application φ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que, pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(P_i) = Q_i$ et pour tout entier $i \in [\![0, n-1]\!]$, φ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

    (a) On suppose dans cette question (et uniquement dans cette question) que $n = 3$.
    Représenter dans un repère orthonormé φ lorsque $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ et $Q = \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$.

    (b) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note u_i, la pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, Q_{i-1}) et (P_i, Q_i).
    Montrer que $u_i = \dfrac{q_i}{p_i} = \dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon}$.

    (c) Montrer que si $i \in [\![0, n-1]\!]$ et $t \in [P_i, P_{i+1}]$, on a $\varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$.

    (d) En admettant que les inégalités $(**)$ permettent d'affirmer que φ est convexe, justifier que φ appartient à E.

    (e) Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $\displaystyle\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)dt$ en fonction de P_i, P_{i+1}, Q_i et Q_{i+1}.

    (f) Exprimer $I(\varphi)$ sous la forme d'une somme en fonction de $P_0, P_1, ..., P_n, Q_0, ...Q_n$.

12. Nous allons maintenant étudier l'application correspondante pour la classe II.
On considère l'application ψ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\psi(P_i) = R_i$ et pour tout entier $i \in [\![0, n-1]\!]$, ψ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

    Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose : $\Pi_i = 1 - P_{n-i}$.

(a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note v_i la pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, R_{i-1}) et (P_i, R_i).

Montrer que $v_i = \dfrac{r_i}{p_i} = \dfrac{1-\varepsilon_i}{1-\varepsilon}$.

(b) On considère l'application ψ^* définie pour tout $t \in [0,1]$, par $\psi^*(t) = 1 - \psi(1-t)$.

i. En admettant que les inégalités $(**)$ permettent d'affirmer que ψ est concave, montrer que ψ^* est convexe sur $[0,1]$.

ii. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que ψ^* est affine sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$.

iii. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, montrer que la pente de ψ^* sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$ est $v_{n-i+1} = \dfrac{1-\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon}$.

iv. On suppose dans cette question (et uniquement dans cette question) que $n = 3$.
Représenter dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de ψ et ψ^* lorsque $P = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ et $R = \left(\dfrac{7}{10}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{10}\right)$.

On dit dans cette situation que les fonctions φ et ψ^* sont **adjointes** l'une de l'autre.
C'est leur comparaison que Gini a proposé de considérer pour "mesurer les inégalités" entre la population de catégorie I et celle de catégorie II.
Une égalité entre les fonctions adjointes signale notamment l'absence totale d'inégalité sociale.
La dernière question précise quelque peu ce point.

13. *Question modifiée car l'original comportait une erreur de raisonnement !*

On suppose dans cette question que $\varepsilon \neq \dfrac{1}{2}$ et que $\varphi = \psi^*$.

(a) Montrer les égalités :

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon_n}{1-\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon}.$$

(b) En déduire que $\varepsilon_1 = \varepsilon_n = \varepsilon$.

(c) Conclure que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \varepsilon_i = \varepsilon$, puis interpréter ce résultat.