Correction DS2

Exercice 1 (ecricome 2011)

1)Δ est diagonale donc diagonalisable (écrire $\Delta = I^{-1}\Delta I$).

$N^2 = 0$ donc N est nilpotente.

$\Delta N = N$ et $N\Delta = N$ donc $\Delta N = N\Delta$.

Enfin, $A = N + \Delta$.

Donc (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

2)a)Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on transforme $A - \lambda I$ en une matrice triangulaire.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ L_2 \longleftrightarrow L_1 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 & 4 - 2\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \longleftarrow (3-\lambda)L_1 + 2L_2 \\ L_3 \end{array}$$

λ est valeur propre de A

$\Longleftrightarrow A - \lambda I$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 & 4 - 2\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ou $1 - \lambda = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

Donc $sp(A) = \{1, 2\}$.

b)Cherchons les sous-espaces propres de A.

$E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A - I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rll} 2x + y - z & = 0 & L_1 \\ -2x - y + 2z & = 0 & L_2 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rc} 2x + y - z = 0 & L_1 \\ z = 0 & L_2 \longleftrightarrow L_1 + L_2 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -2x \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = -2x \text{ et } z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$
$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_1(A)$.

Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_1(A)$ et $dim E_1(A) = 1$.

$E_2(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - 2I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A - 2I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x + y - z & = 0 \\ -2x - 2y + 2z & = 0 \\ -z = 0 & \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Donc $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = -x \text{ et } z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$
$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_2(A)$.

Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_2(A)$ et $dim E_2(A) = 1$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à 2, mais $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
D'après le théorème de réduction, A n'est pas diagonalisable.

> Remarque
> On n'était pas obligé de chercher une base des s.e.p, avoir leur dimension suffisait. On obtenait leur dimension par la formule de cours :
> $dim E_1(A) + rg(A - I) = 3$ et $dim E_2(A) + rg(A - 2I) = 3$.
> Il suffisait alors de chercher le rang de $A - I$ et de $A - 2I$.

3)a)$\Delta X_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Delta X_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Delta X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

b)Les calculs précédents donnent : $\Delta X_1 = 2X_1$, $\Delta X_2 = X_2$ et $\Delta X_3 = X_3$.
Ils montrent d'une part, que X_1 est un vecteur propre de Δ associé à 2, d'autre part que X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A associés à 1.
(On vérifie au passage que X_1, X_2 et X_3 sont non nuls).

(X_1) est une famille de $E_2(A)$, libre car formée d'un seul vecteur non nul.
(X_2, X_3) est une famille de $E_1(A)$, libre également par non colinéarité des vecteurs.
Par concaténation de familles libres provenant de sous-espaces propres différents, on conclut que la famille (X_1, X_2, X_3) est libre.
C'est une famille libre dont le cardinal vaut 3 et coïncide avec la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, c'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
On vient de construire une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ dont chaque vecteur est un vecteur propre de Δ, ce qui prouve que Δ est diagonalisable.

> Remarque
> On pouvait aussi faire une recherche systématique de valeurs propres en transformant par Gauss $\Delta - \lambda I$ en une matrice triangulaire. C'est plus long puisqu'il faudrait ensuite chercher les sous-espaces propres et leur dimension.

Δ est diagonalisable. D'après le cours, il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ inversible et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ diagonale telles que $\Delta = PDP^{-1}$.

Les colonnes de P sont formées des bases des sous-espaces propres de Δ.
D porte en diagonale les valeurs propres de A rangées dans le même ordre que les colonnes de P.

La matrice D est déjà donnée par l'énoncé. La première colonne de P est donc formée d'une base de $E_2(A)$, les deuxième et troisième colonnes sont formées d'une base de $E_1(A)$.

On peut prendre par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

> Remarque
> Il n'y a pas unicité de P puisqu'il n'y a pas unicité des bases des sous-espaces propres.

c)Par la méthode de Gauss, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4)a)On trouve $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc N est nilpotente.

b)On sait déjà que Δ est diagonalisable et que N est nilpotente.
De plus, le produit donne : $N\Delta = N$ et $\Delta N = N$ donc $N\Delta = \Delta N$.
Enfin, on a clairement : $A = N + \Delta$.

Donc (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

c)$A^p = (N+\Delta)^p$

$$= \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} N^k \Delta^{p-k} \quad \text{valide car } N\Delta = \Delta N$$

$$= \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} N^0 \Delta^p + \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} N^1 \Delta^{p-1} + \sum_{k=2}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \underbrace{N^k}_{=0} \Delta^{p-k}$$

$$= \Delta^p + pN\Delta^{p-1}.$$

d)Démonstration par récurrence.
Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : « $\Delta^k N = N\Delta^k = N$ ».

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $\Delta N = N\Delta = N$ », c'est vrai car montré dans 4)b).

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
De l'hypothèse de récurrence $\Delta^k N = N$, en multipliant à gauche par Δ :

$\Delta\Delta^k N = \Delta N$, soit $\Delta^{k+1}N = N$ car $\Delta N = N$.

De l'hypothèse de récurrence $N\Delta^k = N$, en multipliant à droite par Δ :

$N\Delta^k\Delta = N\Delta$, soit $N\Delta^{k+1} = N$ car $N\Delta = N$.
On a établi que $\Delta^{k+1}N = N\Delta^{k+1} = N$ donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \Delta^k N = N\Delta^k = N$.

e)Démonstration par récurrence.
Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition « $\Delta^k = PD^kP^{-1}$.

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $\Delta = PDP^{-1}$, ce qui est vrai d'après 3)b).

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
$\Delta^{k+1} = \Delta^k\Delta$

$$= PD^kP^{-1}PDP^{-1} \quad \text{grâce à HR et 3)b)}$$

$$= PD^kIDP^{-1}$$

$$= PD^{k+1}P^{-1}.$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \Delta^k = PD^kP^{-1}$.

f)La question 4)d) donne en particulier : $N\Delta^{p-1} = N$.
De la question 4)c), on déduit alors :

$$A^p = \Delta^p + pN.$$

D'après la question 4)e), la matrice Δ^p est semblable à la matrice D^p, laquelle est diagonale, comme puissance d'une matrice diagonale.
Donc Δ^p est diagonalisable.

De plus, N étant nilpotente, pN l'est également.

Enfin, on a :

$\Delta^p(pN) = p\Delta^p N = pN$ grâce à 4)d),
et $(pN)\Delta^p = pN\Delta^p = pN$ de nouveau grâce à 4)d).
Donc $(pN)\Delta^p = \Delta^p(pN)$.

Ainsi, (Δ^p, pN) est une décomposition de Dunford de A^p.

Exercice 2 (edhec 2018)

1)det $A = 1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$. Donc A n'est pas inversible.

2)λ est valeur propre de A
$\iff A - \lambda I$ n'est pas inversible
$\iff \det(A - \lambda I) = 0$
$\iff (1-\lambda)(6-\lambda) - 2 \times 3 = 0$
$\iff \lambda^2 - 7\lambda = 0$
$\iff \lambda(\lambda - 7) = 0$
$\iff \lambda = 0$ ou $\lambda = 7$.

Déterminons les sous-espaces propres de A associés à 0 et à 7.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} U \in E_0(A) &\iff AU = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 0 \\ 3x & + & 6y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = -2y \end{aligned}$$

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = -2y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$\begin{aligned} U \in E_7(A) &\iff (A - 7I)U = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} -6x & + & 2y & = & 0 \\ 3x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff y = 3x \end{aligned}$$

Donc $E_7(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 3x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

3)Pour toutes M et N dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, pour tout réel λ, on a :

$f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = A\lambda M + AN = \lambda AM + AN = \lambda f(M) + f(N)$.
Donc f est linéaire.

De plus, $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), f(M) \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

Donc f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

4)a)Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
M \in \operatorname{Ker} f &\iff f(M)=0\\
&\iff AM=0\\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x+2z & y+2t\\ 3x+6z & 3y+6t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2z & = & 0\\ y & + & 2t & = & 0\\ 3x & + & 6z & = & 0\\ 3y & + & 6t & = & 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2z\\ y & = & -2t\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Donc } \operatorname{Ker} f &= \left\{\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix} \mid x=-2z, y=-2t\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix} -2z & -2t\\ z & t\end{pmatrix}, (z,t)\in \mathbf{R}^2\right\}\\
&= \left\{z\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, (z,t)\in \mathbf{R}^2\right\}\\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker} f$.

C'est aussi une famille libre car les deux matrices ne sont pas colinéaires.

Donc $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\dim Kerf = 2$.

b)Le théorème du rang donne : $\dim \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) = \dim Kerf + \dim Imf$.

Donc $\dim Imf = \dim \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) - \dim Kerf = 4-2 = 2$.

c)$f(E_1) = AE_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix} = E_1 + 3E_3$,

$f(E_2) = AE_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix} = E_2 + 3E_4$,

$f(E_3) = AE_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 6 & 0\end{pmatrix} = 2E_1 + 6E_3$,

$f(E_4) = AE_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\\ 0 & 6\end{pmatrix} = 2E_2 + 6E_4$.

D'après le cours, $Imf = \operatorname{Vect}\big(f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4)\big)$.

Or, $f(E_3) = 2f(E_1)$ et $f(E_4) = 2f(E_2)$.

Donc $Imf = \text{Vect}\big(f(E_1), f(E_2)\big) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de Imf de cardinal 2 coïncidant avec la dimension de Imf.C'est donc une base de Imf.

5)a)Les calculs faits dans la question 4)c) donnent : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

b)• Pour le rang de B, c'est immédiat car $rg(B) = rg(f) = dimImf = 2$.

• $B - 7I_4 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et ${}^t(B - 7I_4) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ont même rang.

En notant C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de cette matrice transposée, on remarque que $C_1 = -2C_3$ et $C_2 = -2C_4$.

Donc $rg\,(B - 7I_4) = rg(C_3, C_4) = 2$ car la famille (C_3, C_4) est libre.

c)Le cours donne :

D'une part, $dimE_0(B) + rg(B) = 4$ d'où $dimE_0(B) = 2$.

D'autre part, $dimE_7(B) + rg(B - 7I_4) = 4$ d'où $dimE_7(B) = 2$.

$E_0(B)$ et $E_7(B)$ sont donc non nuls, ce qui prouve que 0 et 7 sont des valeurs propres de B.

B peut-il avoir une autre valeur propre λ autre que 0 et 7 ?
Supposons que ce soit le cas. On aurait alors $dimE_\lambda(B) \geq 1$, ce qui mènerait à : $dimE_0(B) + dimE_7(B) + dimE_\lambda(B) \geq 5$.
C'est impossible car la somme des dimensions des sous-espaces propres de B est inférieure ou égal à 4. Ainsi, $sp(B) = \{0, 7\}$.

Enfin, $dimE_0(B) + dimE_7(B) = 4$ et $B \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$. D'après le théorème de réduction, B est diagonalisable.

6)λ est valeur propre de B

$\iff B - \lambda I_4$ n'est pas inversible

$\iff f - \lambda\text{Id}$ n'est pas bijective car $B - \lambda I_4 = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f - \lambda\text{Id})$

$\iff f - \lambda\text{Id}$ n'est pas injective car $f - \lambda\text{Id}$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$

$\iff Ker(f - \lambda\text{Id}) \neq \{0\}$

$\iff \exists M \neq 0 \mid (f - \lambda\text{Id})(M) = 0$

$\iff \exists M \neq 0 \mid f(M) - \lambda M = 0$

$\iff \exists M \neq 0 \mid f(M) = \lambda M$.

7)Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

a)$X \in \mathscr{M}_{1,2}(\mathbf{R})$ et ${}^tX \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. Par produit, $V = X^tX \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

b)X est un vecteur propre de A associé à λ donc $AX = \lambda X$.

Puis, $f(V) = f\left(X^tX\right) = A\left(X^tX\right) = (AX)^tX = (\lambda X)^tX = \lambda(X^tX) = \lambda V$.

c)Il reste à vérifier que $V \neq 0$. Posons $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

On a alors : $V = X^tX = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}$.

Comme $X \neq 0$, soit $\alpha \neq 0$, soit $\beta \neq 0$. Dans les deux cas, cela entraîne que $V \neq 0$.

On a montré que $V \neq 0$ et que $f(V) = \lambda V$.

D'après la question 6), on conclut que λ est valeur propre de B.

8)Soit λ une valeur propre de B. Il existe alors $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ non nulle telle que $f(M) = \lambda M$.

Posons $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$f(M) = \lambda M$

$\iff AM = \lambda M$

$\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix}$.

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} ax & + & bz & = & \lambda x \\ ay & + & bt & = & \lambda y \\ cx & + & dz & = & \lambda z \\ cy & + & dt & = & \lambda t \end{array} \right.$$

Compte tenu du système obtenu ci-dessus, on déduit :

$AC_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz \\ cx+dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda z \end{pmatrix} = \lambda C_1$.

$AC_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay+bt \\ cy+dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y \\ \lambda t \end{pmatrix} = \lambda C_2$.

Comme M est non nulle, l'une de ses colonnes au moins n'est pas nulle.

Donc $C_1 \neq 0$ ou $C_2 \neq 0$.

C_1 ou C_2 est donc vecteur propre de A associé à λ.

En conséquence, λ est valeur propre de A.

La question 7) montre que si λ est valeur propre de A, alors λ est valeur propre de B. La question 8) montre la réciproque.

Ainsi, λ est valeur propre de A si et seulement si λ est valeur propre de B.

En conclusion, A et B ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 3

Partie A

1)$\forall x \in \mathbf{R},\ sh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -sh(x)$.
Donc sh est impaire.

$\forall x \in \mathbf{R},\ ch(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = ch(x)$.
Donc ch est paire.

2)a) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{t} = +\infty$. Par composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.
Par différence, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{x} - e^{-x}\right) = -\infty$. D'où, $\lim\limits_{x \to -\infty} sh(x) = -\infty$.

sh étant impaire, on déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} sh(x) = +\infty$.

b)a)$x \mapsto e^{x}$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables sur $\mathbf{R}$.
Par composée, $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Par différence, $x \mapsto e^{x} - e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Par quotient, sh est dérivable sur $\mathbf{R}$.

$\forall x \in \mathbf{R},\ sh'(x) = \dfrac{e^{x} - \left(-e^{-x}\right)}{2} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = ch(x)$.

c)$\forall x \in \mathbf{R},\ sh'(x) = ch(x) > 0$. Donc sh est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$sh(x)$			$+\infty$
		$\nearrow$	
	$-\infty$		

d)On remarque que $sh(0) = 0$. Par ailleurs, sh est strictement croissante.
On déduit que $\forall x > 0,\ sh(x) > 0$ et $\forall x < 0,\ sh(x) < 0$.

e)sh est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ comme différence, quotient et composée de fonctions de classe C^2.

De plus, $sh''(x) = ch'(x) = sh(x)$.

Donc $\forall x \geq 0,\ sh''(x) \geq 0$ et $\forall x \leq 0,\ sh''(x) \leq 0$.

Ainsi, sh est concave sur $]-\infty, 0]$, puis convexe sur $[0, +\infty[$.

3)a) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{t} = +\infty$. Par composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.
Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{x} + e^{-x}\right) = +\infty$. D'où, $\lim\limits_{x \to -\infty} ch(x) = +\infty$.

ch étant paire, on déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} ch(x) = +\infty$.

b)a)$x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables sur $\mathbf{R}$.
Par composée, $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Par somme, $x \mapsto e^x + e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Par quotient, ch est dérivable sur $\mathbf{R}$.
$\forall x \in \mathbf{R},\ ch'(x) = \dfrac{e^x + \left(-e^{-x}\right)}{2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$.

c)$\forall x \in \mathbf{R},\ ch'(x) = sh(x)$. La question 2)d) donne alors le signe de $sh(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'(x)$		$-$	0	$+$	
$ch(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Le tableau de variations de ch donne alors : $\forall x \in \mathbf{R}^*,\ ch(x) > 1$.

d)ch est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ comme différence, quotient et composée de fonctions de classe C^2.
De plus, $ch''(x) = sh'(x) = ch(x) > 0$. Donc ch est convexe sur $\mathbf{R}$.

4)a)$\forall x \in \mathbf{R},\ ch(x) - sh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x} > 0$.
Donc $\forall x \in \mathbf{R},\ ch(x) > sh(x)$.

b)Pour tout x réel, on a :

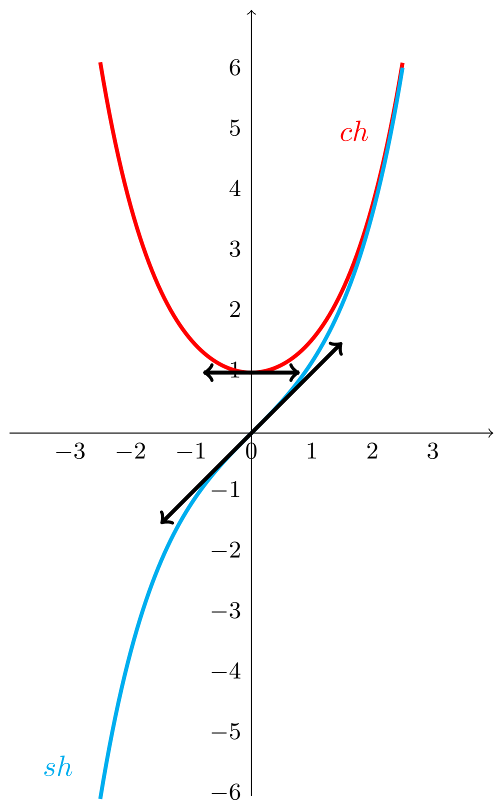
$$\begin{aligned}
\left(ch(x)\right)^2 - \left(sh(x)\right)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2}{4} \\
&= \frac{\left(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right)}{4} \\
&= \frac{4e^x e^{-x}}{4} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbf{R},\ \left(ch(x)\right)^2 = 1 + \left(sh(x)\right)^2$.

c)On étudie sur $[0, +\infty[$ la fonction auxiliaire $\varphi : x \mapsto sh(x) - x$.
φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme différence de fonctions dérivables.
$\forall x \geq 0,\ \varphi'(x) = ch(x) - 1 \geq 0$ d'après 3)c).
Donc φ est croissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $\varphi(0) = 0$.
Cela entraîne que $\forall x \geq 0,\ \varphi(x) \geq 0$.
Ainsi, $\forall x \geq 0,\ sh(x) \geq x$.

Remarque
On peut aussi évoquer que la tangente à la courbe représentative de sh en zéro a pour équation $y = sh'(0)(x-0) + sh(0)$, c'est-à-dire $y = x$.
Comme sh est convexe sur $[0, +\infty[$, elle est au-dessus de ses tangentes sur $[0, +\infty[$ donc au-dessus de la droite $y = x$, d'où le résultat.
On peut aussi retouver cette inégalité en appliquant l'inégalité des accroissements finis.

d)



Comme déjà vu dans la remarque précédente, la tangente à la courbe représentative de sh est la droite d'équation $y = x$.
Cette tangente traverse la courbe car (0,0) est un point d'inflexion de la courbe.
En ce qui concerne la courbe représentative de ch, la tangente est horizontale puisque ch présente un minimum en zéro.
On peut remarquer enfin que sh et ch ont une croissance exponentielle en $+\infty$ car $sh(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$ et $ch(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$.

Partie B

5)a)sh est dérivable en 0. Elle admet donc un DL en 0 à l'ordre 1 :
$sh(x) \underset{0}{=} sh(0) + sh'(0)x + o(x)$.

Avec $sh(0) = 0$ et $sh'(0) = ch(0) = 1$.

D'où, $sh(x) \underset{0}{=} x + o(x)$.

b)ch est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$. Elle admet donc un DL en 0 à l'ordre 2 :
$ch(x) \underset{0}{=} ch(0) + ch'(0)x + \dfrac{ch''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$.

Avec $ch(0) = 1$, $ch'(0) = sh(0) = 0$ et $ch''(0) = ch(0) = 1$.

D'où, $ch(x) \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

6)a)La question 5)a) donne : $sh(x) \underset{0}{\sim} x$, puis $xsh(x) \underset{0}{\sim} x^2$

La question 5)b) donne : $ch(x) - 1 \underset{0}{=} \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ d'où $ch(x) - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

Par quotient d'équivalents, on déduit : $\dfrac{xsh(x)}{ch(x)-1} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{\frac{x^2}{2}}$.

C'est-à-dire : $f(x) \underset{0}{\sim} 2$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$.

Or, $f(0) = 2$. On a donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Ainsi, f est continue à droite en 0.

b)f est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit, quotient et différence de fonctions continues. De plus, f est continue à droite en 0.
Donc f est continue sur $[0, +\infty[$.

7)a)f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit, quotient et différence de fonctions dérivables.

Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\big(sh(x) + xch(x)\big)\big(ch(x)-1\big) - sh(x) \times xsh(x)}{\big(ch(x)-1\big)^2} \\
&= \frac{sh(x)\big(ch(x)-1\big) + xch(x)\big(ch(x)-1\big) - x\big(sh(x)\big)^2}{\big(ch(x)-1\big)^2} \\
&= \frac{sh(x)\big(ch(x)-1\big) + x\big(ch(x)\big)^2 - xch(x) - x\big(sh(x)\big)^2}{\big(ch(x)-1\big)^2} \\
&= \frac{sh(x)\big(ch(x)-1\big) + x\left[\big(ch(x)\big)^2 - \big(sh(x)\big)^2\right] - xch(x)}{\big(ch(x)-1\big)^2}.
\end{aligned}$$

Or, $\big(ch(x)\big)^2 - \big(sh(x)\big)^2 = 1$ d'après la question 4)b).

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{sh(x)\big(ch(x)-1\big) + x\big(1-ch(x)\big)}{\big(ch(x)-1\big)^2}$$
$$= \frac{\big(sh(x)-x\big)\big(ch(x)-1\big)}{\big(ch(x)-1\big)^2}$$
$$= \frac{sh(x)-x}{ch(x)-1}.$$

b)Pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{sh(x)}{ch(x)-1} = \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}-2}.$$

En factorisant haut et bas par e^x, puis en simplifiant, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}-2e^{-x}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c)On a vu dans la partie A que $\forall x > 0,\ sh(x) \geq x$ et $ch(x) > 1$.

Donc $\forall x > 0,\ f'(x) \geq 0$, ce qui prouve que f est croissante sur $]0,+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$

d)Pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{xsh(x)}{ch(x)-1} - 2}{x} = \frac{xsh(x) - 2\big(ch(x)-1\big)}{x\big(ch(x)-1\big)}.$$

En utilisant l'indication donnée, on a :

$$xsh(x) - 2\big(ch(x)-1\big) \underset{0}{=} x\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - 2\left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$
$$\underset{0}{=} x^2 + \frac{x^4}{6} + xo(x^3) - x^2 - 2o(x^3)$$
$$\underset{0}{=} \frac{x^4}{6} + xo(x^3) - 2o(x^3)$$
$$= \frac{x^4}{6} + x \times x^3\epsilon_1(x) - 2x^3\epsilon_2(x)$$
$$= x^3\left(\frac{x}{6} + \epsilon_1(x) - 2\epsilon_2(x)\right).$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$..

De même, $x\big(ch(x)-1\big) = x\left(\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^3}{2} + xo(x^3)\\
&= \frac{x^3}{2} + x \times x^3\epsilon_3(x)\\
&= x^3\left(\frac{1}{2} + x\epsilon_3(x)\right)
\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon_3(x) = 0$.

On déduit : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\frac{x}{6}+\epsilon_1(x)-2\epsilon_2(x)}{\frac{1}{2}+x\epsilon_3(x)}$, puis $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$.

Cette limite est finie donc f est dérivable à droite en 0. De plus $f'_d(0) = 0$.

8)a)Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) - x &= \frac{xsh(x)}{ch(x)-1} - x\\
&= x\left(\frac{sh(x)}{ch(x)-1} - 1\right)\\
&= x \times \frac{sh(x)-ch(x)+1}{ch(x)-1}\\
&= x \times \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2} - \frac{e^x+e^{-x}}{2} + 1}{\frac{e^x+e^{-x}}{2} - 1}\\
&= x \times \frac{2(1-e^{-x})}{e^x+e^{-x}-2}\\
&= \frac{2x}{e^x} \times \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-2x}-2e^{-x}}.
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-2x}-2e^{-x}} = 1$.

Donc $f(x) - x \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{e^x}$.

b)Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big) = 0$.

La droite d'équation $y = x$ est donc asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

9)a)g est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ comme produit et somme de fonctions de classe C^2.

Pour tout $x \geq 0$, on a :

$g'(x) = (sh(x) + xch(x)) - 2sh(x) = xch(x) - sh(x)$.

Puis, $g''(x) = (ch(x) + xsh(x)) - ch(x) = xsh(x)$.

b)$\forall x \geq 0,\ sh(x) \geq 0$ donc $\forall x \geq 0,\ g''(x) \geq 0$.
g' est donc croissante sur $[0, +\infty[$.

En outre, $g'(0) = -sh(0) = 0$. Donc $\forall x \geq 0,\ g'(x) \geq 0$.

c)g est donc croissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $g(0) = 2 - 2ch(0) = 2 - 2 = 0$.
Donc $\forall x \geq 0,\ g(x) \geq 0$.

d)Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{sh(x) - x}{ch(x) - 1}\right)' \quad \text{voir question 7)a)} \\
&= \frac{\big(ch(x) - 1\big)\big(ch(x) - 1\big) - sh(x)\big(sh(x) - x\big)}{\big(ch(x) - 1\big)^2} \\
&= \frac{\big(ch(x)\big)^2 - 2ch(x) + 1 - \big(sh(x)\big)^2 + xsh(x)}{\big(ch(x) - 1\big)^2} \\
&= \frac{-2ch(x) + 2 + xsh(x)}{\big(ch(x) - 1\big)^2} \quad \text{grâce à 4)b)} \\
&= \frac{g(x)}{\big(ch(x) - 1\big)^2}.
\end{aligned}$$

On a vu que $\forall x \geq 0,\ g(x) \geq 0$. De plus, $\big(ch(x) - 1\big)^2 \geq 0$.
Donc $\forall x > 0,\ f''(x) \geq 0$, ce qui prouve que f est convexe.

10)