# DM1 cubes
## à rendre le lundi / /

Exercice 1

Soit $f_n$ la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f_n(x) = 1 - x - x^n$ où $n \in \mathbf{N}^*$.

1)Montrer que $f_n$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$, puis justifier que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n$.

2)a)Montrer que $0 < u_n < 1$.

b)Montrer que $f_{n+1}(u_n) > 0$, puis que $(u_n)$ est croissante.

c)Conclure que $(u_n)$ converge et que sa limite $L$ est dans $[0;1]$.

d)Montrer par l'absurde que $L = 1$.

3)On pose $v_n = 1 - u_n$.

a)Justifier que $v_n > 0$ puis préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
Montrer que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$.

b)Vérifier que $\dfrac{-\ln(n)}{\ln(v_n)} = 1 + \dfrac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \dfrac{\ln\left(\dfrac{\ln(v_n)}{-nv_n}\right)}{\ln(v_n)}$.
En déduire que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

c)Conclure que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

4)Etudier la nature des séries $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} v_n^2$.

Exercice 2

Soit $F = \{P \in \mathbf{R}_4[X], P(0) = P(4) = 0\}$ et soit $W = X(X-4)$.

1)Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_4[X]$.

2)Soit $\Phi$ l'application de $\mathbf{R}_2[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$ qui à tout polynôme $Q$ de $\mathbf{R}_2[X]$ associe $\Phi(Q) = WQ$.

a)Montrer que $\Phi$ est un isomorphisme[1] de $\mathbf{R}_2[X]$ sur $F$.

b)En déduire une base de $F$ et la dimension de $F$.

3)Soit $\Delta$ l'application de $\mathbf{R}_2[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$ qui à tout polynôme $Q$ de $\mathbf{R}_2[X]$ associe $\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X)$ où $Q(X+1)$ désigne la composée du polynôme $X+1$ suivi du polynôme $Q$.

a)Montrer que $\Delta$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.

b)Déterminer le noyau et l'image de $\Delta$.

c)Etablir que $\Delta o \Delta o \Delta = 0$.

1. pour montrer que $\Phi$ est surjective, prendre $P$ dans $F$ et montrer que le reste de la division euclidienne de $P$ par $W$ est nul.