TP7 Python (équations et systèmes différentiels)

En Python, la fonction *odeint* du module scipy.integrate permet de tracer sur $[a, b]$ les trajectoires d'une équation différentielle d'ordre 1 du type

$$(E): \quad y' = f(y, t)$$

Cette fonction prend en paramètres 3 valeurs :
- la fonction mathématique f,
- la valeur y_a de la solution y de (E) vérifiant $y(a) = y_a$,
- la matrice ligne t correspondant aux différentes valeurs du temps.

Elle retourne une liste Y formée des valeurs prises par la solution y pour chacune des valeurs de t.

Exercice 1

Soit l'équation différentielle $(E): \quad y' + y = t$.

1)Résoudre l'équation homogène $(E_0): \quad y' + y = 0$.

2)Trouver une solution particulière de (E) sous forme polynomiale.

3)Déterminer toutes les solutions de (E).

4)Vérifier que les trajectoires de (E) sont divergentes.

5)Le programme ci-dessous affiche une trajectoire de (E). Laquelle ?

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
#intervalle de résolution
a=0
b=4
#condition initiale
y_a=5
#1000 valeurs du temps équiréparties entre a et b
t = np.linspace(a,b,1000)
#saisie de l'équation différentielle
def f(y,t):
    return -y+t
#résolution de l'équa diff
Y=odeint(f,y_a,t)
#affichage de la trajectoire
plt.plot(t,Y)
plt.show()
```

Exercice 2

Soit l'équation différentielle (E) : $y' - y = 1$.

1)Résoudre l'équation homogène (E_0) : $y' - y = 0$.

2)Trouver une solution particulière de (E).

3)Déterminer toutes les solutions de (E).

4)On considère le programme suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
a=0
b=1
t = np.linspace(a,b,1000)
def f(y,t):
    return y+1
for y_a in range(-5,6):
    Y=odeint(f,y_a,t)
    plt.plot(t,Y)
plt.show()
```

a)Exécutez-le. Que dessine t-il ?

b)Les trajectoires sont disjointes. Comment l'expliquer ?

c)Y a t-il des trajectoires d'équilibre ?

Exercice 3 (modèle de Malthus - 1798)

On étudie l'évolution d'une population de cellules au fil du temps.
Notons $N(t)$ le nombre de cellules à l'instant t.
Soit Δt un petit intervalle de temps.
Entre les instants t et $t + \Delta t$, une proportion p(t) des $N(t)$ cellules se duplique[1], donnant naissance à une nouvelle génération de cellules.
On suppose que $p(t)$ est proportionnelle à Δt, de la forme $r\Delta t$, où r est une constante positive, appelée *taux de croissance*. On obtient alors :

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \underbrace{r\Delta t}_{p(t)} N(t)$$

1)En faisant tendre Δt vers zéro, montrer que N est solution de l'équation différentielle

$$y' = ry.$$

2)Donner l'expression de $N(t)$ en fonction de t et N_0 où $N_0 = N(0) > 0$.

3)Déterminer $\lim_{t \to +\infty} N(t)$.

4)Donner l'allure de la courbe de N. Critiquer le modèle de Malthus.

1. c'est la mitose

Exercice 4 (modèle logistique - Verhulst 1845)
Dans le modèle *logistique*, Verhulst suppose que le nombre d'individus $N(t)$ ne peut pas dépasser une valeur maximale $K > 0$, en raison des ressources limitées du milieu.
La population d'effectif initial $N_0 = N(0) > 0$ augmente de façon exponentielle, puis freine sa progression.
Ce frein est modélisé ci-dessous par le facteur $\dfrac{K - N(t)}{K} \in]0, 1[$.
Pour un intervalle de temps Δt et un taux de croissance $r > 0$, on a alors :

$$N(t + \Delta t) = N(t) + r\Delta t \frac{K - N(t)}{K} N(t)$$

1)En faisant tendre Δt vers zéro, montrer que N est solution de l'équation différentielle[2]

$$y' = ry - \frac{ry^2}{K} \qquad (E)$$

2)Déterminer les points d'équilibre de (E).

3)On admet que les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto \dfrac{K}{1 + \lambda e^{-rt}}$, où λ est une constante réelle quelconque.

a)On note $N_0 = N(0)$. Exprimer λ en fonction de K et N_0.

b)Dresser le tableau de variations de N.

c)Exprimer $N''(t)$ en fonction de $N(t)$, $N'(t)$, r et K.

d)En déduire que $N''(t) \geq 0 \iff t \leq \dfrac{1}{r} \ln\left(\dfrac{K - N_0}{N_0}\right)$. Interpréter ce résultat.

4)Exécuter le programme suivant et commenter.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
K=int(input("entrer K"))
r=float(input("entrer r"))
N0=int(input("entrer N0"))
a,b=0,100
t = np.linspace(a,b,1000)
def logistique(y,t):
    return r*y-(r*y**2)/K
Y=odeint(logistique,N0,t)
plt.plot(t,Y)
plt.xlabel("temps")
plt.ylabel("nombre d'individus")
plt.show()
```

2. c'est une équation différentielle non linéaire, appelée équation logistique

Exercice 5 (système différentiel de Lotka-Volterra - 1925)
Les équations de Lotka-Volterra sont un couple d'équations différentielles non linéaires du premier ordre, utilisées pour décrire la population d'un milieu dans lesquel un prédateur et sa proie interagissent.

$$(S)\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$$

a = taux de reproduction des proies (indépendant du nombre de prédateurs),
b = taux de mortalité des proies (dû aux prédateurs rencontrés),
c = taux de mortalité des prédateurs (indépendant du nombre de proies),
d = taux de reproduction des prédateurs (en fonction des proies mangées),
x = nombre de proies (fonctions du temps t),
y = nombre de prédateurs (fonctions du temps t).

On suppose que $\forall t \in \mathbf{R},\ x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.

1)On étudie le cas particulier où $b = d = 0$, ce qui signifie que les prédateurs n'attaquent pas leurs proies et ne se reproduisent pas.

a)Résoudre le système différentiel (S).

b)Montrer que les trajectoires sont les courbes d'équation $y = \dfrac{K}{x^{c/a}}$, où $K > 0$ est une constante.

c)Tracer l'allure de ces trajectoires et interpréter.

2)Déterminer les points d'équilibre de (S).

3)Soit F la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $F(x, y) = a \ln y + c \ln x - by - dx$.

a)Montrer que pour tout couple (x, y) de fonctions solutions de (S), la fonction $t \mapsto F\big((x(t), y(t))\big)$ est constante.
Ce résultat prouve que les trajectoires sont les lignes de niveau de F.

b)Commenter la figure ci-dessous.