

EXERCICE 1

On considère la fonction $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - e \ln(x)$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < e < 2,8 \quad 7,3 < e^2 < 7,4 \quad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

Partie I : Etude de la fonction f

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
(b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
3. Tracer la courbe représentative de f .
4. (a) Etudier les variations de la fonction $u :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x) - x$.
(b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Etude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

5. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , u_n existe et $u_n \geq 2$.
6. (a) Etudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - x$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
8. On suppose qu'on a importé le module *numpy* d'alias *np*.
Ecrire une fonction Python d'en-tête `def suite(A)` : prenant comme paramètre un réel A et renvoyant un entier naturel N tel que $u_N \geq A$.
9. (a) Démontrer : $\forall x \in [2; +\infty[, \quad 2 \ln(x) \leq x \leq \frac{e^x}{3}$
(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq \frac{6-e}{2} u_n$.
(c) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$.

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

10. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ converge et calculer cette intégrale.
11. L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge-t-elle?
12. Montrer que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$ converge. On pourra utiliser le résultat de la question 9. (a).

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction $F :]1; +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 sur l'ouvert $]1; +\infty[^2$, définie pour tout (x, y) de $]1; +\infty[^2$ par :

$$F(x, y) = f(x) + f(y) - xy$$

13. Montrer que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (α, α) , le réel α ayant été défini à la question 4 de la partie I.
14. (a) Déterminer la matrice hessienne de F en (α, α) .
(b) La fonction F admet-elle un extremum local en (α, α) ? Si oui, s'agit-il d'un maximum local ou s'agit-il d'un minimum local?

EXERCICE 2

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de E , où $e_0 = 1$, $e_1 = X$ et $e_2 = X^2$.

On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \quad b(P) = P - P', \quad c(P) = 2XP - (X^2 - 1)P'$$

Par exemple, $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.

Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Partie I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E .
2. (a) Montrer que la matrice de A de a dans la base \mathcal{B} de E est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
(b) Déterminer le rang de la matrice A .
3. L'endomorphisme a est-il bijectif ?
Déterminer une base de $\text{Ker}(a)$ et une base de $\text{Im}(a)$.

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E .

On note B et C les matrices, dans la base \mathcal{B} de E , de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E , on a : $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.
5. (a) Montrer que b admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci.
(b) L'endomorphisme b est-il diagonalisable ?

Partie III : Étude de c

6. Montrer : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?
8. (a) Déterminer une matrice R , carrée d'ordre 3, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D , carrée d'ordre trois, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$.
(b) En déduire que l'endomorphisme c est diagonalisable et déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de c .

Partie IV : Étude de f

9. Montrer que $\forall P \in E, f(P) = P'$.
10. En déduire : $(BA - AB)^3 = 0$.

EXERCICE 3

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de \mathbb{N}^* , on note :

B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k -ième tirage"

R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k -ième tirage"

On définit, pour tout k de \mathbb{N}^* , la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k -ième tirage et égale à 0 sinon.

On définit, pour tout n de \mathbb{N}^* , la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges au cours des n premiers tirages.

Partie I : Simulation informatique

1. On rappelle qu'en Python, la fonction `random()` du module `numpy.random` renvoie un réel aléatoire de $[0, 1]$.

Recopier et compléter la fonction Python d'en-tête `def rouges(n)` : simulant l'expérience étudiée, prenant en paramètre le nombre n de tirages effectués et renvoyant le nombre de boules rouges obtenues.

```
import numpy.random as rd
def rouges(n):
    b=1 #b désigne le nombre de boules bleues de l'urne
    r=2 #r désigne le nombre de boules rouges de l'urne
    s=0 #s désigne le nombre de boules rouges tirées
    for k in range(1,n+1):
        x=rd.random()
        if .....:
            s=.....
            r=.....
        else:
            b=.....
    return .....
```

2. On exécute le programme suivant :

```
n=10
m=0
for i in range(1000):
    m=m+rouges(n)
print(m/1000)
```

On obtient 6.657. Comment interpréter ce résultat?

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([Y = n]) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$.
(b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance? une variance?

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

4. Donner, pour tout n de \mathbb{N}^* , une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
5. Déterminer la loi de X_1 , son espérance et sa variance.
6. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) .
(b) En déduire la loi de X_2 .
(c) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
(a) Calculer $P(R_1 \cap \dots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \dots \cap B_n)$.
(b) Justifier : $P([S_n = k]) = \binom{n}{k} P(R_1 \cap \dots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \dots \cap B_n)$,
puis en déduire : $P([S_n = k]) = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$
8. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , S_n admet une espérance et : $E(S_n) = \frac{2n}{3}$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
(a) Montrer : $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \frac{k+2}{n+3}$.
(b) En déduire : $P([X_{n+1} = 1]) = \frac{E(S_n) + 2}{n+3}$.
(c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1} . Que remarque-t-on?

Partie IV : Étude d'une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.

On pose, pour tout n de \mathbb{N}^* , $T_n = \frac{S_n}{n}$.

10. Justifier, pour tout n de \mathbb{N}^* : $\forall x < 0, \quad P([T_n \leq x]) = 0, \quad \text{et} : \quad \forall x > 1, \quad P([T_n \leq x]) = 1$.
11. Soit $x \in [0; 1]$. Montrer, pour tout n de \mathbb{N}^* : $P([T_n \leq x]) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.
12. En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité, dont on précisera la fonction de répartition et une densité.