Correction DS2 - ecg2 - maths appliquées
mercredi 8/11/2023

Exercice 1

Partie A

1)A est symétrique donc diagonalisable.

2)a)A étant la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, la première colonne de A donne les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base $\mathscr{B}$.

On a donc $f(e_1) = \begin{pmatrix} a^2 \\ ab \\ ac \end{pmatrix}$, puis $f(e_1) = a \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = aX$.

De même, $f(e_2) = \begin{pmatrix} ab \\ b^2 \\ bc \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = bX$.

Et, $f(e_3) = \begin{pmatrix} ac \\ bc \\ c^2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = cX$.

Donc les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ sont colinéaires à X.

b)D'après le cours, $Imf = \text{Vect}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big) = \text{Vect}\,(aX, bX, cX)$.

Comme $a \neq 0$, on a : $bX = \dfrac{b}{a}.aX$ et $cX = \dfrac{c}{a}.aX$.

On a donc $Imf = \text{Vect}\,(aX) = \text{Vect}\,(X)$.

(X) est une famille génératrice de Imf.
Elle est libre car $X \neq 0$ du fait que $a \neq 0$.
(X) est donc une base de Imf et $dimImf = 1$.

3)a)Le théorème du rang donne :

$$dimKerf + \underbrace{dimImf}_{=1} = \underbrace{dim\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})}_{=3}.$$

D'où $dimKerf = 2$.

b)Par linéarité de f, on a :

$f(be_1 - ae_2) = bf(e_1) - af(e_2) = b(aX) - a(bX) = 0$

et $f(ce_1 - ae_3) = cf(e_1) - af(e_3) = c(aX) - a(cX) = 0$.

Ce qui prouve que les vecteurs $be_1 - ae_2$ et $ce_1 - ae_3$ appartiennent à $Kerf$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}\right)$ est donc formée de deux vecteurs de $Kerf$.

Comme $a \neq 0$, on est sûr que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ce qui prouve la liberté de la famille.

C'est une famille libre dont le cardinal vaut 2 et coïncide avec la dimension de $Kerf$ (trouvée en 3)a)). C'est donc une base de $Kerf$.

4)a)$AX = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3+ab^2+ac^2 \\ a^2b+b^3+bc^2 \\ a^2c+b^2c+c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a^2+b^2+c^2)a \\ (a^2+b^2+c^2)b \\ (a^2+b^2+c^2)c \end{pmatrix}$

$= (a^2+b^2+c^2) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a^2+b^2+c^2)X.$

$X \neq 0$ puisque $a \neq 0$. De plus, AX est colinéaire à X.
Donc X est un vecteur propre de A.

b)D'après la question précédente, $a^2+b^2+c^2$ est valeur propre de A.
Cette valeur propre est strictement positive car $a \neq 0$.

Par ailleurs, $rg(A) = rg(f) = dimImf = 1 \neq 3$ et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
Donc A n'est pas inversible.
Cela signifie que 0 est valeur propre de A.

On vient donc de trouver deux valeurs propres de A. Supposons que A possède une troisième valeur propre.
$A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ possède alors trois valeurs propres distinctes.
D'après le corollaire du théorème de réduction, les trois sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

L'égalité de cours $dimE_0(A) + rg(A) = 3$ mène alors à :
$dimE_0(A) = 3 - rg(A) = 3 - 1 = 2$. D'où une contradiction.

Ainsi, on est sûr que A possède exactement deux valeurs propres qui sont 0 et $a^2+b^2+c^2$.

Partie B

5)Soient $M = (m_{ij})$ et $N = (n_{ij})$ deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda M + N) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} (\lambda m_{ij} + n_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \left(\lambda \sum_{j=1}^{3} m_{ij} + \sum_{j=1}^{3} n_{ij} \right) \text{ par linéarité de la somme} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} m_{ij} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} n_{ij} \text{ par linéarité de la somme} \\ &= \lambda\sigma(M) + \sigma(N). \end{aligned}$$

Donc σ est linéaire.

6)a)Pour toute matrice $M \in F$, on a :

$$\begin{aligned}\sigma(M) &= (a^2+ab+ac)+(ab+b^2+bc)+(ac+bc+c^2)\\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\\ &= (a+b+c)^2.\end{aligned}$$

Donc $\forall M \in F,\ \sigma(M) \geq 0$.

b)Faisons un raisonnement par l'absurde.
Supposons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
Prenons une matrice U de F telle que $a+b+c \neq 0$ (il y en a plein ...)
$U \in F$ et F, en tant qu'espace vectoriel, est stable par multiplication externe. Donc $-U \in F$.

La question 6)a) donne alors : $\sigma(U) \geq 0 \quad (1)$, mais également $\sigma(-U) \geq 0$, ou encore par linéarité de σ :
$-\sigma(u) \geq 0$ ou encore $\sigma(u) \leq 0 \quad (2)$

(1) et (2) donnent : $\sigma(u) = 0$, c'est-à-dire $(a+b+c)^2 = 0$, ou encore $a+b+c=0$.
D'où une contradiction.

Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

Remarque
On pouvait aussi trouver un exemple de matrice U de F telle que $-U \notin F$.

$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in F \quad$ (prendre $a=b=c=1$).

Mais $-U = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \notin F$, puisque les matrices de F doivent avoir tous leurs coefficients diagonaux positifs, du fait des carrés.

7)On constate que $G = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) \mid \sigma(M) = 0\} = Ker\sigma$.

Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

Le théorème du rang donne : $dimKer\sigma + dimIm\sigma = dim\mathscr{M}_3(\mathbf{R}) = 9$.

Donc $dimG = 9 - dimIm\sigma$.

Par ailleurs, on sait que $Im\sigma \subset \mathbf{R}$ donc $dimIm\sigma = 0$ ou 1.

On ne peut pas avoir $dimIm\sigma = 0$, sinon on aurait $Im\sigma = \{0\}$, puis $\sigma = 0$, ce qui n'est pas le cas. Donc $dimIm\sigma = 1$.

Finalement, $dimG = 8$.

Exercice 2

1)Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda M + N) &= f\left(\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda b + b' & \lambda a + a' \\ 0 & \lambda c + c' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda b & \lambda a \\ 0 & \lambda c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b' & a' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b' & a' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \\
&= \lambda f(M) + f(N).
\end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

Enfin, f est « endo », puisque $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}),\ f(M) \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

2)$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4,$

$f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4,$

$f(e_3) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1e_4,$

$f(e_4) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4.$

Donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3)On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Puis, $A^4 = \left(A^2\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $A^4 = A^2$.

En introduisant le polynôme $P(X) = X^4 - X^2$, l'égalité ci-dessus s'écrit : $P(A) = 0$, ce qui prouve que P est un polynôme annulateur de A.

D'après le cours, l'ensemble des valeurs propres de A est contenu dans l'ensemble des racines de P.

Or, $P(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$ ou $x = 1$.

Les racines de P sont donc -1, 0 et 1. Ainsi, $sp(A) \subset \{-1, 0, 1\}$.

4)Dans cette question, on va confirmer que -1, 0 et 1 sont bien des valeurs propres de A.

• $E_{-1}(A) = \{U \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid (A + I)U = 0\}$.

En posant $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, on obtient :

$$(A + I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

En injectant, on déduit :

$$E_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = -y,\ z = 0,\ t = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ y \in \mathbf{R} \right\}.$$

Donc $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

$E_{-1}(A)$ n'est pas nul donc -1 est une valeur propre de A.
Le sous-espace propre de A associé à -1 est alors $E_{-1}(A)$.

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_{-1}(A)$.

Elle est libre car constituée d'un unique vecteur non nul. C'est donc une base de $E_{-1}(A)$.

• Par le même raisonnement, on obtient :

$E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid (A-I)U = 0\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$E_1(A)$ n'est pas nul donc 1 est une valeur propre de A.
Le sous-espace propre de A associé à 1 est alors $E_1(A)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(A)$.

• Enfin, $E_0(A) = \{U \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid AU = 0\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_0(A)$.

$E_0(A)$ n'est pas nul donc 0 est une valeur propre de A.
Le sous-espace propre de A associé à 0 est alors $E_0(A)$.

5)$\dim E_{-1}(A) + dim E_0(A) + dim E_1(A) = 1+1+1 = 3 \neq 4$.

Or, $A \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$.

D'après le théorème de réduction, A n'est pas diagonalisable.

Exercice 3 (edhec 2017 légèrement modifié)

1)Soient P et Q deux polynômes de E. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}\big(\varphi(\lambda P+Q)\big) &= \int_0^1 \big(\lambda P+Q\big)(x+t)dt \\ &= \int_0^1 \big(\lambda P(x+t)+Q(x+t)\big)dt \\ &= \lambda\int_0^1 P(x+t)dt+\int_0^1 Q(x+t)dt \\ &= \lambda\big(\varphi(P)\big)(x)+\big(\varphi(Q)\big)(x).\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi(\lambda P+Q)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$.

Donc φ est linéaire.

2)• $\big(\varphi(e_0)\big)(x)=\int_0^1 e_0(x+t)dt=\int_0^1 1dt=\big[t\big]_0^1=1$.

Donc $\varphi(e_0)=1e_0+0e_1+0e_2$.

• $$\begin{aligned}\big(\varphi(e_1)\big)(x) &= \int_0^1 e_1(x+t)dt \\ &= \int_0^1 (x+t)dt \\ &= \left[xt+\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} \quad \text{en intégrant par rapport à } t! \\ &= x+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Donc $\varphi(e_1)=\dfrac{1}{2}e_0+1e_1+0e_2$.

• $$\begin{aligned}\big(\varphi(e_2)\big)(x) &= \int_0^1 e_2(x+t)dt \\ &= \int_0^1 (x+t)^2dt \\ &= \int_0^1 (x^2+2xt+t^2)dt \\ &= \left[x^2t+xt^2+\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} \quad \text{en intégrant par rapport à } t! \\ &= x^2+x+\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Donc $\varphi(e_2)=\dfrac{1}{3}e_0+1e_1+1e_2$.

3)On sait déjà que φ est linéaire.

Il reste à prouver que $\forall P \in E,\ \varphi(P) \in E$.
Soit $P \in E$. Il existe des réels a, b et c tels que $P = ae_0 + be_1 + ce_2$.
Par linéarité de φ, on déduit :

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a\varphi(e_0) + b\varphi(e_1) + c\varphi(e_2) \\ &= ae_0 + b\left(\frac{1}{2}e_0 + 1e_1\right) + c\left(\frac{1}{3}e_0 + 1e_1 + 1e_2\right) \\ &= \left(a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)e_0 + (b+c)e_1 + ce_2.\end{aligned}$$

Donc $\varphi(P) \in E$, ce qui prouve que φ est « endo ».

Ainsi, φ est un endomorphisme de E.

Remarque
On pouvait aussi chercher $Im\varphi$ et utiliser que E est stable par combinaison linéaire.

4)La question 2) donne immédiatement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5)A est triangulaire sans zéro sur sa diagonale donc A est inversible.
Comme $A = \mathscr{M}_{(e_0,e_1,e_2)}(\varphi)$, on conclut que φ est bijective.
φ est un endomorphisme bijectif de E donc c'est un automorphisme de E.

6)A étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Donc $sp(A) = \{1\}$.

Supposons que A est diagonalisable. Alors, il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ $(*)$
D porte sur sa diagonale les valeurs propres de A. Donc $D = I$.
En remplaçant dans $(*)$, on a : $A = PIP^{-1} = I$, ce qui est absurde.
Donc A n'est pas diagonalisable et φ non plus.

7)a)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $\exists U_n \in \mathbf{R}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & U_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ».

$A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On choisit $U_0 = 0$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n A \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & U_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ grâce à l'hypothèse de récurrence} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}+\frac{n}{2} & \frac{1}{3}+\frac{n}{2}+U_n \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & U_n+\frac{1}{6}(3n+2) \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
.
$$

Posons $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{6}(3n+2)$.

On a alors : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & U_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

7)b)L'initialisation donne $U_0 = 0$ et l'hérédité donne :

$$\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} = U_n + \frac{1}{6}(3n+2)$$

.

7)c)On a pour tout $k \in \mathbf{N}, U_{k+1} - U_k = \dfrac{1}{6}(3k+2)$.

En sommant ces égalités pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on obtient :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (U_{k+1} - U_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{6}(3k+2) \quad (*)$

Par télescopage, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (U_{k+1} - U_k) = U_n - U_0 = U_n$.

Puis, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{6}(3k+2) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1} (3k+2) = \frac{1}{6}\left(3 \times \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 2\right) = \frac{1}{6}\left(3\frac{n(n-1)}{2} + 2n\right)$

$= \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3n(n-1)+4n}{2} = \dfrac{3n^2+n}{12}$.

En reportant dans $(*)$, on a : $U_n = \dfrac{3n^2+n}{12}$.

Exercice 4 (extrait ecricome 2010)

1)On obtient une FI du fait que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Transformons l'expression de $f(x)$ en écrivant : $f(x) = \frac{x\ln x + 1}{x} - \ln(x+1)$.

$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ par croissances comparées.

Donc $\lim_{x\to 0^+} (x\ln x + 1) = 1$.

$\lim_{x\to 0^+} x = 0^+$. Par inverse, $\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x + 1}{x} = +\infty$.

$\lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1$ et $\lim_{t\to 1} \ln t = 0$. Par composée, $\lim_{x\to 0^+} \ln(x+1) = 0$.

Par différence, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Cela entraîne que $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2)Quand $x \to +\infty$, on a également une FI puisque $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$.

Transformons l'expression de $f(x)$ en écrivant :

$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x} = -\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{x} = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$.

$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim_{t\to 1} \ln t = 0$. Par composée, $\lim_{x\to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Par différence, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

Cela entraîne que $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

3)f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme différence, somme et composée de fonctions dérivables.

$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{x(x+1) - x^2 - (x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)}$.

$\forall x > 0,\ f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

4)Tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

5)f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
D'après le théorème de bijection, elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f\big(]0,+\infty[\big) =]0,+\infty[$.

$1 \in]0,+\infty[$ (ensemble d'arrivée) admet donc un unique antécédent, noté $\alpha \in]0,+\infty[$ par f, ce qui revient à dire que l'équation $f(x) = 1$ possède une unique solution $\alpha > 0$.

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln\left(\frac{4}{3}\right) + 3 = -\ln 3 - (\ln 4 - \ln 3) + 3 = 3 - \ln 4$
$= 3 - 2\ln 2 \approx 3 - 2 \times 0,7 \approx 1,6$.
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = -\ln 2 - (\ln 3 - \ln 2) + 2 = 2 - \ln 3$
$\approx 2 - 1,1 \approx 0,9$.

Enfin, $f(\alpha) = 1$ par construction.

On déduit : $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(\alpha) < f\left(\frac{1}{3}\right)$.

f étant strictement décroissante, on conclut que $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.