TD16 - variables aléatoires à densité

Exercice 1 ★ ★ ☆☆

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$

1)Montrer que f est une densité de probabilité.

2)Soit X une variable aléatoire de densité f.

a)Déterminer la fonction de répartition F de X.

b)Calculer $P(X \leq 2)$, $P(X \geq 3)$ et $P(2 \leq X \leq 4)$.

Exercice 2 ★ ★ ☆☆

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

1)Montrer que f est une densité de probabilité.

2)Soit X une variable aléatoire de densité f.
Déterminer la fonction de répartition F de X.

Exercice 3 ★ ★ ☆☆

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1)Montrer que X est une variable aléatoire à densité.

2)Déterminer une densité f de X.

Exercice 4 ★ ★ ☆☆

Soit X une variable aléatoire de densité f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}(1-x)^{1/3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1)Montrer que X admet une espérance et la calculer.

2)Montrer que X admet une variance et la calculer.

Exercice 5 ★ ★ ☆☆

Soit X une variable aléatoire de densité f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4\ln x}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si} x < 1. \end{cases}$$

1)Montrer que X admet une espérance et la calculer.

2)Montrer que X^2 n'admet pas d'espérance. X admet-elle une variance ?

3)Soit $Y = X^{3/2}$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 6 ★ ★ ☆☆
Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1)Déterminer la fonction de répartition F de X et tracer son allure.

2)Soit $Y = e^X$ et soit G la fonction de répartition de Y.

a)Montrer que :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

b)Tracer l'allure de F_Y.

c)Montrer que Y est à densité, puis déterminer une densité g de Y.

Exercice 7 ★ ★ ☆☆
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

1)Montrer que f est une densité de probabilité.

2)Soit X une variable aléatoire de densité f.

a)Déterminer la fonction de répartition F de X.

b)Déterminer le réel μ, appelé *médiane*, tel que $F(\mu) = \dfrac{1}{2}$.

3)Soit $Y = X^2$.

a)Déterminer la fonction de répartition G de Y.

b)Montrer que Y est une variable aléatoire à densité, puis établir qu'une densité de Y est la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

c)Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 8 (hec 2002) ★ ★ ★★
Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $[1, +\infty[$.

Partie I : première approche

1)Soit g l'application définie sur $\mathbf{R}$ par : $g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que g est une densité de probabilité.

2)Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I admettant g pour densité.
Pour tout $t \in \mathbf{R}$, déterminer $P(X \leq t)$ et montrer que X n'admet pas d'espérance.

3)Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans I admettant g pour densité. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

a)Pour tout réel t, exprimer l'événement $[V \leqslant t]$ à l'aide des variables aléatoires X et Y. En déduire la probabilité $P(V \leq t)$.

b)Montrer que V admet pour densité l'application h définie par :

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{2(t-1)}{t^3} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c)De façon analogue, calculer pour tout réel t la probabilité $P(U > t)$. En déduire que la variable aléatoire U admet pour densité l'application m définie par :

$$m(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t^3} & \text{si } t \in I \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d)Montrer que U admet une espérance (à calculer), mais que V n'en a pas.

Partie II : situation plus générale

n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on suppose que n visiteurs, numérotés de 1 à n, se rendent aléatoirement dans un musée et que, pour tout entier de l'intervalle $[\![1, n]\!]$, l'heure d'arrivée du visiteur numéro k est une variable aléatoire X_k admettant pour densité l'application g définie dans la partie I.
On suppose de plus que X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes.
Si r est un entier de l'intervalle $[\![1, n]\!]$, on note T_r la variable aléatoire désignant l'heure d'arrivée du r-ième arrivant.
La partie I traite donc du cas $n = 2$, les variables aléeatoires U et V étant respectivement égales à T_1 et T_2.

4)Soit $t \in I$ fixé. Pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$, on note B_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque l'événement $[X_k \leqslant t]$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

a)Préciser la loi de la variable aléatoire Z définie par : $Z = B_1 + \ldots + B_n$.

b)Pour tout entier r de l'intervalle $[\![1, n]\!]$, exprimer l'événement $[T_r \leqslant t]$ à l'aide de la variable aléatoire Z et en déduire l'égalité : $\mathrm{P}([T_r \leqslant t]) = \displaystyle\sum_{k=r}^{n} C_n^k \left(1 - \frac{1}{t}\right)^k \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k}$.

5)a)Vérifier que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} - (n + 1 - k) \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} = 0.$

b)En déduire que, pour tout entier r de l'intervalle $[\![1, n]\!]$, la variable aléatoire T_r admet pour densité l'application f_r définie par :

$$f_r(t) = \begin{cases} r \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \left(\dfrac{1}{t}\right)^{n+2-r} \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)^{r-1} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c)Donner un équivalent à $tf_r(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et en déduire que les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ admettent une espérance alors que T_n n'en admet pas.

Indications / Réponses

Exercice 1

2)a)On trouve $F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \\ & \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$

b)$P(X \leq 2) = F(2) = \frac{1}{2}$, $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3) = \frac{1}{3}$

et $P(2 \leq X \leq 4) = F(4) - F(2) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Exercice 2

2)On trouve $F(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Exercice 3

1)Utiliser le théorème 1.

2)Ce même théorème 1 donne $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ & \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ \text{valeur arb.} \geq 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

En prenant 0 comme valeur arbitraire, on a : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ & \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Exercice 4

1)Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ l'existence de l'espérance est acquise par la convergence de $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$ qui n'est pas une intégrale impropre.

On calcule ensuite $E(X) = \displaystyle\int_0^1 \frac{4}{3}x(1-x)^{1/3}dx$ grâce à une IPP et on trouve $E(X) = \dfrac{3}{7}$.

2)De même, X^2 admet une espérance donnée par : $E(X^2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{4}{3}x^2(1-x)^{1/3}dx$.

Une première IPP donne : $E(X^2) = \displaystyle\int_0^1 2x(1-x)^{4/3}dx$.

Une deuxième IPP donne : $E(X^2) = \dfrac{9}{35}$.

Enfin, la formule de Koënig donne : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{18}{245}$.

Exercice 5

1)X admet une espérance ssi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{4\ln x}{x^2}dx$ converge.

On fait une IPP sur $\displaystyle\int_1^{A} \frac{4\ln x}{x^2}dx$, puis on fait $A \to +\infty$ et on trouve $E(X) = 4$.

2)On montre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{4\ln x}{x}dx$ diverge en calculant $\displaystyle\int_1^{A} \frac{4\ln x}{x}dx$, puis en faisant $A \to +\infty$.

3)D'après le théorème de transfert, on est ramené à prouver la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{4\ln x}{x^{3/2}}dx$.

On fait une IPP sur $\int_1^A \frac{4\ln x}{x^{3/2}}dx$, puis on fait $A \to +\infty$, on trouve $E(X^{3/2}) = 16$.

<u>Exercice 6</u>

1)On trouve : $F(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

2)c)Le thm 1 donne : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

<u>Exercice 7</u>

2)a)On trouve : $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ & \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

2)b)$F(\mu) = \frac{1}{2} \iff 1 - e^{-\mu^2/2} = \frac{1}{2} \iff \mu = \sqrt{2\ln 2}$.

3)a)On trouve $G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ & \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

b)Appliquer le théorème 1.

c)$E(Y) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{2}e^{-x/2}dx = 2$ (faire une IPP).

<u>Exercice 8</u>

2)$P(X \leq t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{t} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

$\int_1^{+\infty} tg(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge (Riemann) donc X n'a pas d'espérance.

3)a)$\forall t \in \mathbf{R}$, $(V \leq t) = (X \leq t) \cap (Y \leq t)$. On déduit $P(V \leq t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^2 & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

b)Immédiat avec le thm1.

c)$\forall t \in \mathbf{R}$, $(U > t) = (X > t) \cap (Y > t)$. On déduit $P(U > t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} & \text{si } t \in I \\ 1 & \text{sinon .} \end{cases}$

Puis, $P(U \leq t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{t^2} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $m(t) = \begin{cases} \frac{2}{t^3} & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

d)$\int_1^{+\infty} th(t)$ diverge car $th(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{t}$ donc V n'a pas d'espérance.

$\int_1^{+\infty} tm(t)$ converge car $tm(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{t^2}$ donc U a une espérance et $E(U) = 1$.