Correction DM16

Exercice (extrait ecricome 2003)

Partie I

1)• f est définie sur $\mathbf{R}$.

• $\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) \geq 0$.

• f est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) et continue sur $[0, +\infty[$ car construite sur cet intervalle comme le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
Donc f est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 0.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ converge et vaut 0 car f est nulle sur $]-\infty, 0[$.

Pour tout $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A f(t)dt = \int_0^A \frac{2}{(1+t)^3}dt = \int_0^A 2(1+t)^{-3}dt = \left[2 \times \frac{(1+t)^{-2}}{-2}\right]_0^A$

$\displaystyle= \left[\frac{-1}{(1+t)^2}\right]_0^A = \frac{-1}{(1+A)^2} + 1 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

Enfin, d'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^{+\infty} f(t)dt = 0 + 1 = 1.$

En conclusion, f est une densité de probabilité.

2)Soit Z une variable aléatoire de densité f et soit F_Z sa fonction de répartition.

Par définition, $\forall x \in \mathbf{R},\ F_Z(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

Distinguons deux cas :

• $x < 0$

$F_Z(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0dt$ car f est nulle sur $]-\infty, 0[$ donc à-fortiori sur $]-\infty, x[$.

Donc $F_Z(x) = 0$.

• $x \geq 0$

$F_Z(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x \frac{2}{(1+t)^3}dt$

$= \dfrac{-1}{(1+x)^2} + 1$ en reprenant le calcul fait en 1) avec $A \to x$.

Donc $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

3)$(1+t)^3 \underset{+\infty}{\sim} t^3$ donc $\dfrac{2t}{(1+t)^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{t^2}$.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge car c'est une intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$.

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt$ converge.

D'après le critère de convergence sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} dt$ converge.

Enfin, $\int_0^1 \frac{2t}{(1+t)^3} dt$ converge car $t \mapsto \frac{2t}{(1+t)^3}$ est continue sur $[0,1]$ (on n'a donc pas une intégrale impropre).

D'après la relation de Chasles, $\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} dt$ converge.

Pout tout $A > 0$, calculons maintenant $\int_0^A \frac{2t}{(1+t)^3} dt$ à l'aide du changement de variable $u = t+1$.

$u = t+1 \iff t = \underbrace{u-1}_{\varphi(u)}$.

- $t = 0 \iff u = 1$ et $t = A \iff u = A+1$.
- $\frac{2t}{(1+t)^3} = \frac{2(u-1)}{u^3}$.
- $dt = \varphi'(u)du = du$.

φ est de classe C^1 sur $[1, A+1]$. La formule de changement de variable donne :

$$\int_0^A \frac{2t}{(1+t)^3} dt = \int_1^{A+1} \frac{2(u-1)}{u^3} du = \int_1^{A+1} \left(\frac{2}{u^2} - \frac{2}{u^3}\right) = \left[-\frac{2}{u} + \frac{1}{u^2}\right]_1^{A+1}$$

$$= -\frac{2}{A+1} + \frac{1}{(A+1)^2} + 1 \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} dt = 1$.

4)Z admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)| dt$ converge.

$t \mapsto tf(t)$ étant nulle sur $]-\infty, 0[$ et positive sur $[0, +\infty[$, on est ramené à montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} dt$.

Celle-ci est acquise d'après la question 3). Donc Z admet une espérance.

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-\infty}^0 tf(t)dt + \int_0^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} dt = 1.$$

5)Z admet une variance si et seulement si Z^2 admet une espérance.

D'après le théorème de transfert, cela se produit si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^2 f(t)| dt$ converge.

$t \mapsto t^2 f(t)$ étant nulle sur $]-\infty, 0[$ et positive sur $[0, +\infty[$, cela se ramène à étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t)^3}dt$.

Or, $\displaystyle\frac{2t^2}{(1+t)^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{t}dt$ diverge.

D'après le critère de convergence sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t)^3}dt$ diverge, puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t)^3}dt$ diverge.

On conclut que Z n'admet pas de variance.

6)a)$P(C) = P(Z_2 > 2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - F_Z(2) = \dfrac{1}{9}$.

$P(D) = P(Z_2 < 3) = P(Z < 3) = F_Z(3) = \dfrac{15}{16}$.

$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{P(2 < Z_2 < 3)}{P(C)} = \frac{P(2 < Z < 3)}{P(C)} = \frac{F_Z(3) - F_Z(2)}{P(C)}$$

$$= \frac{\frac{15}{16} - \frac{8}{9}}{\frac{1}{9}} = \frac{7}{16}.$$

b)i)$(T \leq x) = (Z_1 \leq x) \cap (Z_2 \leq x)$.

ii)Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} G_T(x) &= P(T \leq x) \\ &= P\big((Z_1 \leq x) \cap (Z_2 \leq x)\big) \\ &= P(Z_1 \leq x)P(Z_2 \leq x) \quad \text{car } Z_1 \text{ et } Z_2 \text{ sont indépendantes} \\ &= F_{Z_1}(x)F_{Z_2}(x) \\ &= F_Z(x)^2 \quad \text{car } Z_1 \text{ et } Z_2 \text{ ont même loi que } Z. \end{aligned}$$

c)F_Z est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf événtuellement en 0.

Par carré, G_T est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf événtuellement en 0.

Donc T est une variable aléatoire à densité. Une densité de T est donnée par :

$\forall x \neq 0,\ f_T(x) = G_T'(x) = 2F_Z'(x)F_Z(x) = 2f(x)F_Z(x)$.

Pour $x = 0$, on peut attribuer à f_T une valeur arbitraire positive ou nulle, par exemple 0 et comme $x \mapsto 2f(x)F_z(x)$ s'annule en 0, on a finalement :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_T(x) = 2f(x)F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{4}{(1+x)^3} - \dfrac{4}{(1+x)^5} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Partie II

7)$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

8)$S = M + N$.

Le temps de fabrication moyen est : $E(S) = E(M) + E(N) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{0+1}{2} = 1$.