
DM10
à rendre le lundi / /

Exercice 1

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = x + 1 + 2e^x.$$

Et la fonction g de deux variables définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, g(x, y) = e^x (x + y^2 + e^x).$$

- 1) Etudier les variations de f et donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- 2) Montrer que \mathcal{C}_f admet une asymptote oblique en $-\infty$ et étudier la position de \mathcal{C}_f par rapport à cette asymptote.
- 3) Dédire des variations de f l'existence d'un unique réel $\alpha \in [-2, -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$. (On rappelle que $e \approx 2,7$).
- 4) Déterminer le seul point critique de g .
- 5) Montrer que g présente un extrémum relatif β en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum ?
- 6) Etablir que $4\beta + \alpha^2 - 1 = 0$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction g_n sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \geq 0, g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.

- 1) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $g_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$.
- 3) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale I_n est convergente.
- 4) A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, I_{n+1} = (n+1)I_n.$$

- 5) En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}$, $I_n = n!$