BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

MATHÉMATIQUES E
(épreuve n° 289)
ANNEE 2017
Épreuve conçue par HEC Paris
Voie économique et commerciale

Le sujet

Le sujet de cette année était composé d'un exercice d'algèbre linéaire et d'un problème à dominante analytique et probabiliste.

L'exercice, très progressif, étudiait essentiellement des matrices à n lignes et n colonnes dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou 1. Il comportait également des questions de *Scilab* (détermination des valeurs propres d'une matrice à partir d'une séquence *Scilab* donnée).

Le problème comportait trois parties et étudiait la façon dont les tables de mortalité utilisées en démographie et en actuariat pour prévoir l'espérance de vie des individus d'une population, étaient à la base de modèles permettant d'ajuster la durée de vie à des statistiques portant sur les décès observés au sein d'une génération.
La partie I était consacrée à l'étude d'une loi de probabilité classique dans ce type de modèle, la loi exponentielle linéaire à deux paramètres a et b (densité, espérance, liens avec la loi normale et la loi uniforme). Cette première partie s'achevait par quelques questions de *Scilab* (création d'une fonction qui génère des simulations d'une loi exponentielle linéaire).
Dans les parties suivantes, on s'intéressait à divers types d'estimation des paramètres a et b supposés inconnus. Pour cela, on suivait pendant une période de h années, une cohorte de n individus de même âge au début de l'étude et on modélisait leurs durées de vie respectives à partir de cette date par n variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle linéaire de paramètre a et b.
La partie II proposait la mise en évidence d'un intervalle de confiance asymptotique du paramètre a pour un niveau de confiance donnée.
Dans la partie III, on déterminait un estimateur convergent du paramètre b à partir du nombre de survivants au-delà de la période de h années.

Les résultats statistiques

L'exercice et le problème comptaient respectivement pour 32% et 68% des points du barème.
Plus précisément, les parties I, II et III du problème comptaient respectivement pour 32%, 15% et 21% des points du barème.
Sur les 2132 candidats ayant composé dans cette épreuve, la note moyenne est de 9,46 avec un écart-type de 4,67.

Les résultats par école sont les suivants :

- HEC (1645 candidats) – moyenne : 10,25 ;
- ESCP Europe (2066 candidats) – moyenne : 9,65.

Environ, 6,5%, soit 141 candidats, obtiennent une note supérieure à 16 et 14 candidats se voient attribuer la note maximale de 20. La note médiane est de 9,9 et les premier et troisième quartiles sont égaux à 5,2 et 13,2 respectivement.
Pour obtenir la note de 20, il fallait obtenir au moins 75% des points du barème (l'exercice et la moitié du problème ou bien tout le problème).
Notons que les questions de Scilab avaient un poids assez important correspondant à 12% des points de barème.

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Si la rédaction est moins désinvolte que par le passé, la présentation laisse encore beaucoup à désirer : omission de la numérotation des questions, copies pleines de ratures et à la limite de la lisibilité (écriture anarchique, non respect des lignes horizontales), absence de résultats encadrés, va-et-vient entre différentes questions des différentes parties du problème et entre l'exercice et le problème.
Le jury rappelle aux futurs candidats qu'un correcteur ne s'attarde pas à essayer de « décrypter » une copie illisible. En revanche, une copie propre et claire ne peut qu'avantager son auteur.
Enfin, on rappelle que les abréviations dans les copies doivent être proscrites.

Exercice

Les correcteurs sont unanimes pour relever une amélioration sensible des connaissances en algèbre linéaire, même si beaucoup reste à faire !! Toutefois, on relève un peu moins d'incohérences et de confusions (manifestement, les mises en garde récurrentes du jury commencent à être entendues) !!
Cependant, on observe toujours des confusions, des maladresses et des erreurs de toute nature : « l'union de familles libre est libre, confusions entre cardinal, dimension, ordre, rang ainsi qu'entre espaces, applications, vecteurs, les valeurs propres sont les racines du polynôme annulateur ».
Enfin, peu de candidats interprètent les résultats *Scilab* correctement et ils retrouvent quasiment tous par le calcul les bases des sous-espaces propres.

Problème

Rappelons que les candidats ne doivent recopier que ce qui est utile.
Dans la question 1.a), beaucoup de candidats justifient très mal la dérivabilité ou le caractère C^1 de fonctions composées. De plus, ils ne précisent jamais que l'ensemble image est un intervalle comme image d'un intervalle par une fonction continue. Par suite, le théorème de la bijection est en général mal appliqué, quand il est cité…
Dans la question 1.b), les candidats éprouvent quelques difficultés à se ramener à une équation du second degré à paramètre ; de plus, ils oublient parfois de dire que le discriminant est positif ou ne le montrent pas.

Dans la question 2.a), les candidats veulent absolument faire une comparaison avec une intégrale de Riemann convergente. Certains sont passés à l'exponentielle dans les équivalents. Enfin, une erreur grossière fréquente : « comme G admet une limite finie en $+\infty$, elle est prolongeable en l'infini et l'intégrale est faussement impropre ».
Certains candidats évoquent l'intégrale dans la question 3.a) sans vérifier au préalable qu'elle est convergente ; de même, ils ne définissent pas l'espérance et passent sous silence la condition d'existence.
Dans la question 4.a), la plupart des candidats ne justifient pas les enchainements pour le calcul de $P(X \geq x)$; par exemple, ils n'évoquent pas la stricte monotonie de la fonction carrée sur $\mathbf{R}_+$.
Dans la question 11.a), certains candidats calculent le biais puis concluent directement que l'estimateur est convergent !!

ÉLÉMENTS DE CORRIGÉ - Maths HEC (E) 2017

EXERCICE

1.a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

b) Puisque $A^2 - I_2$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de A. Il en résulte que les seules valeurs propres possibles de A sont les racines -1 et $+1$ de ce polynôme.
Comme aucune des deux matrices $A - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est inversible, les deux nombres $+1$ et -1 sont effectivement des valeurs propres de A.

c) La matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ possède deux valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

2.a) Comme $P^{-1} B\, P$ est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, les valeurs propres de B sont -1 et $+1$.

b) Comme $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, les deux sous-espaces propres de B sont :

$$E_{-1}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{+1}(B) = \text{ Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

3. a) Comme il y a deux manières de choisir chacun des n^2 coefficients d'une matrice de $\mathcal{B}_n(\mathbf{R})$, le nombre d'éléments de $\mathcal{B}_n(\mathbf{R})$ est $2^{(n^2)}$.

b) Pour choisir une matrice de $\mathcal{B}_n(\mathbf{R})$ dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1, il y a n manières de choisir le coefficient de la première ligne égal à 1, puis $n-1$ manières de choisir le coefficient de la deuxième ligne égal à 1, etc.
Par conséquent, le nombre de matrices de $\mathcal{B}_n(\mathbf{R})$ dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 est $n!$.

4.a) Soit y un élément de l'image de $u - id$ et $x \in E$ tel que $y = (u - id)(x)$.

$$(u + id)(y) = (u + id)\big((u - id)(x)\big) = \big((u + id) \circ (u - id)\big)(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E.$$

En effet, l'endomorphisme $(u + id) \circ (u - id) = u \circ u - u \circ id + id \circ u - id \circ id = id - u + u - id$ est l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$ de E.

Par conséquent, y appartient au noyau F de l'endomorphisme $u + id$.

b) De l'inclusion $\text{Im}(u - id) \subset \text{Ker}(u + id)$, on déduit grâce au théorème du rang :

$$n - q = n - \dim\big(\text{Ker}(u - id)\big) = \text{Rg}(u - id) = \dim\big(\text{Im}(u - id)\big) \leqslant \dim(F) = p.$$

Par suite, $p + q \geqslant n$.

c) La famille $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est libre puisqu'elle est obtenue par concaténation de deux familles libres de sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres distinctes.
Son cardinal $p + q$ ne peut donc pas excéder n, ce qui prouve grâce à 4.b que n est égal à $p + q$.
En tant que famille libre de n vecteurs de E, $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est donc une base de E.

b) $u(g_1 - f_1) = u(g_1) - u(f_1) = g_1 + f_1$ puisque g_1 appartient au noyau G de $u - id$ et f_1 au noyau F de $u + id$.
De même : $u(g_1 + f_1) = u(g_1) - u(f_1) = g_1 - f_1$.

c) Soit $\mathcal{C} = \big(g_1 - f_1, g_1 + f_1, \ldots, g_p - f_p, g_p + f_p, g_{p+1}, \ldots, g_q\big)$.

- La famille $\mathcal{C}$ est constituée de n vecteurs, puisque : $2p + (q-p) = p + q = n$.
- La famille $\mathcal{C}$ est libre.

En effet, si on considère n scalaires $\alpha_1, \ldots \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q$ tels que :

$$\alpha_1\,(g_1 - f_1) + \beta_1\,(g_1 + f_1) + \ldots + \alpha_p\,(g_p - f_p) + \beta_p\,(g_p + f_p) + \beta_{p+1}\,g_{p+1} + \ldots + \beta_q\,g_q = 0_E$$

alors

$$\sum_{i=1}^{p}(\beta_i - \alpha_i)\,f_i + \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i + \beta_i)\,g_j + \sum_{i=p+1}^{q}\beta_i\,g_i = 0_E$$

ce qui, par indépendance linéaire des vecteurs $f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q$, entraîne :

$$\begin{cases} \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \beta_i - \alpha_i = 0 \\ \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \alpha_i + \beta_i = 0 \\ \forall\, i \in [\![p+1,p]\!],\ \beta_i = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \alpha_i = 0 \\ \forall\, j \in [\![1,q]\!],\ \beta_j = 0 \end{cases}.$$

Par conséquent, $\mathcal{C}$ est une base de E, et la matrice de u dans cette base appartient à $\mathcal{B}_n(\mathbf{R})$ puisque l'image de chacun des vecteurs de $\mathcal{C}$ est un vecteur de $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} u(g_1 - f_1) = g_1 + f_1 \\ u(g_1 + f_1) = g_1 - f_1 \\ \ldots \\ u(g_p - f_p) = g_p + f_p \\ u(g_p + f_p) = g_p - f_p \\ u(g_{p+1}) = g_{p+1} \\ \ldots \\ u(g_q) = g_q \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \ldots & & & & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \ldots & & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_n(\mathbf{R}).$$

PROBLÈME

Partie I. Loi exponentielle linéaire

1.a) La fonction $G_{a,b}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et sa dérivée, donnée par

$$\forall\, x \geqslant 0,\quad G'_{a,b}(x) = -(a + b\,x)\exp\Big(-\,a\,x - \frac{b}{2}\,x^2\Big)$$

est strictement négative.

Il en résulte que la fonction $G_{a,b}$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Comme elle est continue sur cet intervalle, elle réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur son image qui est l'intervalle $\Big]\lim\limits_{x\to+\infty} G_{a,b}(x)\,,\,G_{a,b}(0)\Big] = \left]0,1\right]$.

b) Il s'agit de résoudre l'équation du second degré (1), d'inconnue x suivante : $b\,x^2 + 2ax - 2y = 0$.

Son discriminant $\Delta = 4\big(a^2 + 2b\,y\big)$ est strictement positif.

L'équation (1) admet deux solutions $\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 2b\,y}}{b}$ et $\dfrac{-a - \sqrt{a^2 + 2b\,y}}{b}$.

c) Soit $u \in \left[0,1\right[$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

$$1 - u = G_{a,b}(x) \Longleftrightarrow a\,x + \frac{b}{2}\,x^2 = -\ln(1-u) \Longleftrightarrow x = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ln(1-u)}}{b}$$

puisque, pour $y = -\ln(1-u)$, la seule solution positive de l'équation (1) est $\dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ln(1-u)}}{b}$.

On a donc : $G_{a,b}^{-1}(1-u) = \dfrac{-a+\sqrt{a^2-2b\ln(1-u)}}{b}$.

2. a) La fonction $G_{a,b}$ étant continue sur $\mathbf{R}_+$, elle admet une intégrale sur tout segment inclus dans cet intervalle. De plus, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 G_{a,b}(x) = 0$ (par croissances comparées) et comme l'intégrale de référence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est convergente (par critère de Riemann, puisque $2>1$), il en résulte par comparaison d'intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

b) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\dfrac{b(x+a/b)^2}{2}\Big) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi/b}} \exp\Big(-\dfrac{(x+a/b)^2}{2/b}\Big)$ est une densité de la loi normale $\mathcal{N}\Big(-\dfrac{a}{b}, \dfrac{1}{b}\Big)$ d'espérance $-\dfrac{a}{b}$ et d'écart type $\dfrac{1}{\sqrt{b}}$.

c) Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $-\dfrac{a}{b}$, d'écart type $\dfrac{1}{\sqrt{b}}$ et de densité $\varphi_{a,b}$. On a :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \exp\Big(-a\,x - \frac{b}{2}x^2\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \exp\Big(-\frac{b}{2}\Big(x+\frac{a}{b}\Big)^2 + \frac{a^2}{2b}\Big)\,\mathrm{d}x$, soit encore,

$\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \exp\Big(\frac{a^2}{2b}\Big) \times \int_0^{+\infty} \varphi_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \exp\Big(\frac{a^2}{2b}\Big) \times P[X \geqslant 0]$, c'est-à-dire,

$\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \exp\Big(\frac{a^2}{2b}\Big) \times P\Big[Z \geqslant \frac{a}{\sqrt{b}}\Big] = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \exp\Big(\frac{a^2}{2b}\Big) \times \Phi\Big(-\frac{a}{\sqrt{b}}\Big)$.

3.a) On remarque que pour tout $x \geqslant 0$, on a : $G'_{a,b}(x) = -f_{a,b}(x)$.
La fonction $f_{a,b}$ est une densité de probabilité parce que :

- $\forall x \in \mathbf{R},\ f_{a,b}(x) \geqslant 0$;
- $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$;
- l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et égale à 1, car $f_{a,b}$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \Big[-G_{a,b}(x)\Big]_0^A = G_{a,b}(0) - \lim_{A\to+\infty} G_{a,b}(A) = 1 .$$

b) $\forall A > 0$, $\displaystyle\int_0^A G_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x = [x\,G_{a,b}(x)]_0^A - \int_0^A x\,G'_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$, d'où $\displaystyle\int_0^A x\,f(x)\,\mathrm{d}x = -A\,G_{a,b}(A) + \int_0^A G_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$ qui tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$ quand A tend vers $+\infty$.

Il en résulte que X admet une espérance et que : $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$.

4.a) $\forall x \geqslant 0$, on a : $P\Big(\Big[\dfrac{-a+\sqrt{a^2+2bY}}{b} \geqslant x\Big]\Big) = P([a^2+2bY \geqslant (a+bx)^2]) = P\Big(\Big[Y \geqslant a\,x + \dfrac{b}{2}x^2\Big]\Big) = G_{a,b}(x)$.

b) D'après le résultat précédent, la fonction de répartition de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad F_X(x) = P([X \leqslant x]) = \begin{cases} 1 - \exp\Big(-a\,x - \dfrac{b}{2}x^2\Big) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui démontre que X suit la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$.

c) Lorsque U suit la loi uniforme sur $[0,1[$, $Y = -\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ et par conséquent $G_{a,b}^{-1}(1-U) = \dfrac{-a+\sqrt{a^2-2b\ln(1-U)}}{b} = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+2bY}}{b}$ suit la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$.

5.a) La ligne (2) affecte à la variable u une matrice colonne dont les n composantes sont des simulations de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $[0,1[$.

b) Si U suit la loi uniforme sur $[0,1[$, alors la variable aléatoire $-\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

Si Y suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, alors $X = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+2\,b\,Y}}{b}$ suit la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$.

Par conséquent, l'application de la fonction `grandlinexp` à un triplet `(a,b,n)` fournit une matrice colonne dont les n composantes sont des simulations de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$.

6. Par la loi des grands nombres, la moyenne empirique $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ d'un échantillon de taille n de la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$ est un estimateur convergent de l'espérance de cette loi.

Pour $a=0$ et $b=1$, cette espérance est d'après 2.c) égale à

$$\sqrt{\frac{2\pi}{b}}\exp\Big(\frac{a^2}{2\,b}\Big)\times\Phi\Big(-\frac{a}{\sqrt{b}}\Big)=\sqrt{2\pi}\times\Phi(0)=\sqrt{2\pi}\times\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Par conséquent, les valeurs générées par la boucle *Scilab* fourniront des valeurs approchées du nombre réel $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Partie II. Premier décès et intervalle de confiance de a

7. Par indépendance des X_i, on obtient, pour tout $x\in\mathbf{R}_+$:

$$P([M_n\geqslant x])=P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i\geqslant x]\Big)=\prod_{i=1}^{n}P([X_i\geqslant x])=\exp\Big(-na\,x-n\frac{b}{2}x^2\Big)\quad.$$

$$\forall x\in\mathbf{R},\ P([M_n\geqslant x])=\begin{cases}\exp\Big(-na\,x-n\dfrac{b}{2}x^2\Big) & \text{si } x\geqslant 0\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Par conséquent, M_n suit la loi exponentielle linéaire $\mathcal{E}_\ell(na,nb)$.

8.a) • Si $x<0$, $[n\,H_n\leqslant x]=[U_n\leqslant x]=\emptyset$ puisque $H_n(\Omega)\subset\mathbf{R}_+$, d'où : $F_{U_n}(x)=0$.

• Si $x\geqslant n\,h$, $[n\,H_n\leqslant x]=[U_n\leqslant x]=\Omega$, puisque $H_n(\Omega)\subset[0,h]$, d'où : $F_{U_n}(x)=1$.

• Si $0\leqslant x<n\,h$, $[U_n\leqslant x]=\Big[H_n\leqslant\dfrac{x}{n}\Big]=\Big[M_n\leqslant\dfrac{x}{n}\Big]$, d'où :

$$F_{U_n}(x)=1-\exp\Big(-n\,a\Big(\frac{x}{n}\Big)-\frac{n\,b}{2}\Big(\frac{x}{n}\Big)^2\Big)=1-\exp\Big(-a\,x-\frac{b\,x^2}{2n}\Big).$$

b)c) La variable aléatoire U_n n'admet pas de densité car sa fonction de répartition n'est pas continue sur $\mathbf{R}$. En effet, la fonction F_{U_n} est discontinue au point $x=nh$.

d) On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P([U_n\leqslant x])=\begin{cases}1-\exp(-a\,x) & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$, ce qui prouve que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$.

9.a) Les deux relations à satisfaire s'écrivent :

$$\begin{cases}\big(1-\mathrm{e}^{-d}\big)-\big(1-\mathrm{e}^{-c}\big)=1-\alpha\\[2mm] \big(1-\mathrm{e}^{-c}\big)=\dfrac{\alpha}{2}\end{cases}\iff\begin{cases}\big(1-\mathrm{e}^{-d}\big)=1-\dfrac{\alpha}{2}\\[2mm] \big(1-\mathrm{e}^{-c}\big)=\dfrac{\alpha}{2}\end{cases}\iff\begin{cases}d=\ln 2-\ln(\alpha)\\[2mm] c=\ln 2-\ln(2-\alpha)\end{cases}.$$

Ainsi, ce système admet une unique solution pour α donné.

b) D'après 8.d), la suite $(aU_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(1)$, d'où,

$$\lim_{n\to+\infty} P[\,c \leqslant aU_n \leqslant d\,] = 1-\alpha \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} P\Big[\frac{c}{U_n} \leqslant a \leqslant \frac{d}{U_n}\Big] = 1-\alpha\,.$$

Ainsi, $\Big[\dfrac{c}{U_n}, \dfrac{d}{U_n}\Big]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a, de niveau de confiance $1-\alpha$.

Partie III. Nombre de survivants et estimateur convergent de b

10.a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire S_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $P([X_i \geqslant h]) = G_{a,b}(h)$, donc, $E(S_i) = G_{a,b}(h)$. De même, puisque $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire D_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $P([X_i \leqslant 1]) = 1 - G_{a,b}(1)$, on a $E(D_i) = 1 - G_{a,b}(1)$.
Il est clair que dans les quatre cas de figure possibles concernant les couples (S_i, D_i), on a toujours $S_iD_i = 0$. Donc, S_iD_i est la variable certaine égale à 0 ; par suite, $\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ E(S_iD_i) = 0$.

b) Par définition, $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \mathrm{Cov}(S_i, D_j) = E(S_iD_j) - E(S_i)E(D_j)$.

- si $i = j$, alors, $E(S_iD_j) = E(S_iD_i) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Cov}(S_i, D_i) = -E(S_i)E(D_i) = -G_{a,b}(h)\big(1 - G_{a,b}(1)\big) < 0$.
  Par suite, S_i et D_i ne sont pas indépendantes car leur covariance n'est pas nulle.
- si $i \neq j$, alors $P\big([S_i = 1] \cap [D_j = 1]\big) = P\big([X_i \geqslant h] \cap [X_j \leqslant 1]\big) = P\big([X_i \geqslant h]\big)P\big([X_j \leqslant 1]\big)$ car X_i et X_j sont indépendantes. Or, $P\big([X_i \geqslant h]\big)P\big([X_j \leqslant 1]\big) = P\big([S_i = 1]\big)P\big([D_j = 1]\big)$.
  Par suite, $P\big([S_i = 1] \cap [D_j = 1]\big) = P\big([S_i = 1]\big)P\big([D_j = 1]\big)$.

Le même raisonnement appliqué aux couples $(S_i = 1, D_j = 0)$, $(S_i = 0, D_j = 1)$, $(S_i = 0, D_j = 0)$ montre que : $P\big([S_i = \theta] \cap [D_j = \rho]\big) = P\big([S_i = \theta]\big)P\big([D_j = \rho]\big)$, avec $\theta = 0$ ou 1 et $\rho = 0$ ou 1.
Par suite, $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, avec $i \neq j$, les variables aléatoires S_i et D_j sont indépendantes.
Bilan : $\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, les variables aléatoires S_i et D_j sont indépendantes si et seulement si $i \neq j$.

c) On a : $\mathrm{Cov}(\overline{S}_n, \overline{D}_n) = \mathrm{Cov}\Big(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_i, \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i\Big) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}(S_i, D_j)$.
Or, on sait que si $i \neq j$, les variables aléatoires S_i et D_j sont indépendantes $\Longrightarrow \mathrm{Cov}(S_i, D_j) = 0$.
Par suite, $\mathrm{Cov}(\overline{S}_n, \overline{D}_n) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(S_i, D_i) = -\dfrac{G_{a,b}(h)\big(1 - G_{a,b}(1)\big)}{n}\,$.
On sait que $\overline{S}_n$ représente le nombre moyen d'individus de la *cohorte* dont la durée de survie dépasse h années et $\overline{D}_n$ représente le nombre moyen d'individus dont la durée de survie est inférieure à 1 an.
Il est clair que si $\overline{S}_n$ augmente, alors $\overline{D}_n$ diminue et inversement, donc $\mathrm{Cov}(\overline{S}_n, \overline{D}_n)$ qui mesure le degré de liaison entre $\overline{S}_n$ et $\overline{D}_n$ est de signe négatif, ce que le résultat du calcul confirme ! ! !

11.a) La linéarité de l'espérance permet d'écrire : $E(\overline{S}_n) = E\Big(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_i\Big) = E(S_1) = G_{a,b}(h)$. Or $\overline{S}_n$ est une fonction de l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, par suite, $\overline{S}_n$ est un estimateur sans biais du paramètre $G_{a,b}(h)$ qui est un paramètre vectoriel (fonction de (a,b)).
Les variables aléatoires $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont indépendantes et suivent chacune la loi $\mathcal{B}\big(G_{a,b}(h)\big)$.
Par conséquent, la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_i$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, P([X_1 \geqslant h]) = \mathcal{B}\big(n, G_{a,b}(h)\big)$.
Par suite, $V(\overline{S}_n) = \dfrac{n\,G_{a,b}(h)\big(1 - G_{a,b}(h)\big)}{n^2} = \dfrac{G_{a,b}(h)\big(1 - G_{a,b}(h)\big)}{n}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Or, l'estimateur $\overline{S}_n$ étant sans biais, son rique quadratique est égal à sa variance et puisque cette dernière tend vers 0, on sait (cours) que cette condition est suffisante pour conclure à la convergence de l'estimateur $\overline{S}_n$.
Bilan : $\overline{S}_n$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $G_{a,b}(h)$.

b) Puisque $\forall i \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire D_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $P([X_i \leqslant 1]) = 1 - G_{a,b}(1)$, un raisonnement tout à fait identique montrerait que $E(\overline{D}_n) = 1 - G_{a,b}(1)$ et $V(\overline{D}_n) = \dfrac{G_{a,b}(1)\big(1 - G_{a,b}(1)\big)}{n}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Bilan : la variable aléatoire $\overline{D}_n$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $1 - G_{a,b}(1)$.
Remarque : $G_{a,b}(h)$ et $1 - G_{a,b}(1)$ sont des paramètres "vectoriels" qui décrivent un sous-ensemble Θ de $\mathbf{R}^2$.

12.a) (i) $\big[\big|(\lambda\, Z_n - \mu\, R_n) - (\lambda\, z(a,b) - \mu\, r(a,b))\big| \geqslant \varepsilon\big] = \big[\big|(\lambda\, Z_n - \lambda\, z(a,b)) - (\mu\, R_n - \mu\, r(a,b))\big| \geqslant \varepsilon\big]$.
Or (inégalité triangulaire), $\big|(\lambda\, Z_n - \lambda\, z(a,b)) - (\mu\, R_n - \mu\, r(a,b))\big| \leqslant \big|(\lambda\, Z_n - \lambda\, z(a,b))\big| + \big|(\mu\, R_n - \mu\, r(a,b))\big|$.
Par suite, si l'événement $\big[\big|(\lambda\, Z_n - \lambda\, z(a,b)) - (\mu\, R_n - \mu\, r(a,b))\big| \geqslant \varepsilon\big]$ est réalisé, alors l'événement $\big[\big|(\lambda\, Z_n - \lambda\, z(a,b))\big| + \big|(\mu\, R_n - \mu\, r(a,b))\big| \geqslant \varepsilon\big]$ est réalisé.
Bilan : $\big[\big|(\lambda\, Z_n - \mu\, R_n) - (\lambda\, z(a,b) - \mu\, r(a,b))\big| \geqslant \varepsilon\big] \subset \big[\lambda\big|Z_n - z(a,b)\big| + \mu\big|R_n - r(a,b)\big| \geqslant \varepsilon\big]$.
(ii) L'inégalité $\lambda\big|Z_n - z(a,b)\big| + \mu\big|R_n - r(a,b)\big| \geqslant \varepsilon$ implique :
$\big(\lambda\big|Z_n - z(a,b)\big| \geqslant \varepsilon/2\big)$ ou $\big(\mu\big|R_n - r(a,b)\big| \geqslant \varepsilon/2\big)$ ou $\big(\lambda\big|Z_n - z(a,b)\big| \geqslant \varepsilon/2$ et $\mu\big|R_n - r(a,b)\big| \geqslant \varepsilon/2\big)$.
En termes d'événements, on a donc :
$\big[\lambda\big|Z_n - z(a,b)\big| + \mu\big|R_n - r(a,b)\big| \geqslant \varepsilon\big] \subset \big[\lambda\big|Z_n - z(a,b)\big| \geqslant \varepsilon/2\big] \cup \big[\mu\big|R_n - r(a,b)\big| \geqslant \varepsilon/2\big]$, soit encore,
$\big[\lambda\big|Z_n - z(a,b)\big| + \mu\big|R_n - r(a,b)\big| \geqslant \varepsilon\big] \subset \big[\big|Z_n - z(a,b)\big| \geqslant \varepsilon/2\lambda\big] \cup \big[\big|R_n - r(a,b)\big| \geqslant \varepsilon/2\mu\big]$
En définitive, compte tenu de la relation (i), on a :
$\big[\big|(\lambda\, Z_n - \mu\, R_n) - (\lambda\, z(a,b) - \mu\, r(a,b))\big| \geqslant \varepsilon\big] \subset \big[\big|Z_n - z(a,b)\big| \geqslant \varepsilon/2\lambda\big] \cup \big[\big|R_n - r(a,b)\big| \geqslant \varepsilon/2\mu\big]$.
Or, quels que soient les événements A, B et C tels que $C \subset A \cup B$, on a : $0 \leqslant P(C) \leqslant P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.
Donc, $0 \leqslant P\big[\big|(\lambda\, Z_n - \mu\, R_n) - (\lambda\, z(a,b) - \mu\, r(a,b))\big| \geqslant \varepsilon\big] \leqslant P\big[\big|Z_n - z(a,b)\big| \geqslant \varepsilon/2\lambda\big] + P\big[\big|R_n - r(a,b)\big| \geqslant \varepsilon/2\mu\big]$.
Puisque Z_n et R_n sont des estimateurs convergents de $z(a,b)$ et $r(a,b)$ (résultat admis), on a par définition d'un estimateur convergent : $\lim\limits_{n \to +\infty} P\big[\big|Z_n - z(a,b)\big| \geqslant \varepsilon/2\lambda\big] = \lim\limits_{n \to +\infty} P\big[\big|R_n - r(a,b)\big| \geqslant \varepsilon/2\mu\big] = 0$
Le théorème d'encadrement $\Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} P\big[\big|(\lambda\, Z_n - \mu\, R_n) - (\lambda\, z(a,b) - \mu\, r(a,b))\big| \geqslant \varepsilon\big] = 0$.
Bilan : $\lambda Z_n - \mu R_n$ est un estimateur convergent du paramètre $\lambda\, z(a,b) - \mu\, r(a,b)$.

b) Avec $\lambda = \dfrac{2}{h-1} > 0$, $\mu = \dfrac{2}{h(h-1)} > 0$, $z(a,b) = \ln G_{a,b}(1) = -a - \dfrac{b}{2}$ et $r(a,b) = \ln G_{a,b}(h) = -ah - \dfrac{b}{2}h^2$, la question a) prouve que B_n est un estimateur convergent de $\lambda\, z(a,b) - \mu\, r(a,b)$.
Or, $\lambda\, z(a,b) - \mu\, r(a,b) = \dfrac{2}{h-1}\Big(-a - \dfrac{b}{2}\Big) - \dfrac{2}{h(h-1)}\Big(-ah - \dfrac{b}{2}h^2\Big) = b$.
Bilan : B_n est un estimateur convergent du paramètre inconnu b.